

Megoldás. Kínálkozik a dinamikai megoldás. A higanyra erőt fejt ki a Föld és a henger. A hengerre erőt fejt ki a Föld, a higany és a lejtő. A (higany + henger) rendszerre tehát a Föld és a lejtő fejtenek ki erőt, melyek következtében a rendszer tömegközéppontja a lejtővel párhuzamos a gyorsulással mozog. S -sel jelölve a hengerre ható súrlódási erőt, a dinamika alaptörvénye szerint

$$(m + M)g \sin \alpha - S = (m + M)a.$$

A lejtőn csúszásmentesen gördülő henger az ugyancsak a gyorsulással mozgó tömegközéppontja körül $\beta = a/R$ szöggyorsulással forog. A gyorsuló forgást az S súrlódási erő idézi elő. (Vegyük észre, hogy a higany nem forog, mivel a henger és a higany közötti súrlódás elhanyagolható.) Így a forgásra vonatkozó dinamikai egyenlet:

$$SR = MR^2 \frac{a}{R},$$

amelyből

$$S = Ma$$

adódik. Ezt a haladó mozgás dinamikai egyenletébe helyettesítve a gyorsulásra kapjuk:

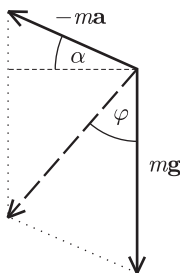
$$a = \frac{m + M}{m + 2M} g \sin \alpha.$$

Speciális esetekben:

$$a = \begin{cases} g \sin \alpha, & \text{ha } M \ll m; \\ \frac{2}{3}g \sin \alpha, & \text{ha } M = m; \\ \frac{1}{2}g \sin \alpha, & \text{ha } M \gg m. \end{cases}$$

A higany felszínének a vízszintessel bezárt szögét legegyszerűbben abból határozhatjuk meg, hogy a folyadék felszíne a folyadékkal együtt mozgó gyorsuló rendszerben is merőleges a rá ható (nehézségi + tehetetlenségi) erők eredőjére. Amekkora φ szöget zár be ez az eredő erő a függőlegessel, akkora φ szöget fog a higany felszíne a vízszintessel bezárni. A 2. ábra alapján a keresett szög tangense könnyen meghatározható:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ma \cos \alpha}{mg - ma \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\frac{g}{a} - \sin \alpha}.$$



2. ábra

Vizsgáljuk meg a gyorsulásra felírt három speciális esetet!

a) $M \ll m$ esetén

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

vagyis ekkor $\varphi = \alpha = 10^\circ$.

b) $M = m$ esetén

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \alpha}{\frac{3}{2 \sin \alpha} - \sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{3 - 2 \sin^2 \alpha},$$

amiből $\varphi = 6,636^\circ \approx 6,6^\circ$.

c) $M \gg m$ esetén

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \alpha}{\frac{2}{\sin \alpha} - \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 - \sin^2 \alpha},$$

ahonnan $\varphi = 4,962^\circ \approx 5,0^\circ$.

Megjegyzés. A $M \gg m$ eset diszkussziója nem volt feladat, itt csak a szimmetria kedvéért, no meg azért is tárgyaltuk, mert néhány versenyző figyelmetlenségből ezt vizsgálta az $M \ll m$ eset helyett.