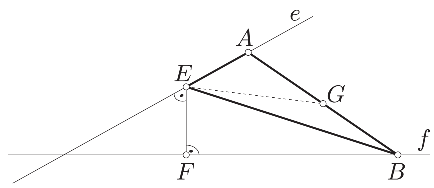
I. megoldás. Jelölje G az AB szakasz felezőpontját. A két egyenest összekötő legrövidebb szakasz, a normál transzverzális, végpontjait jelölje E és F az *1. ábra* szerint. Ismert, hogy ez a szakasz az e és az f egyenesre is merőleges. Az EF szakasz legfeljebb egység hosszú, mivel csak ekkor tud a feladat szerint mozogni az AB szakasz.



1. ábra

A BEF háromszög síkja merőleges az e egyenesre, mivel tartalmaz két metsző, e-re merőleges egyenest (EF-et és f-et). Így az EB szakasz is merőleges az e egyenesre, tehát az AEB háromszög derékszögű.

Az AEB háromszög átfogója az AB szakasz. Így az E csúcshoz tartozó súlyvonal hossza az átfogó fele, azaz $\frac{1}{2}$ egység. Tehát a G pont $\frac{1}{2}$ egység távolságra van az E ponttól.

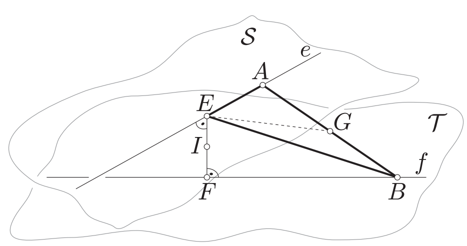
Hasonlóan bizonyítható, hogy az AFB háromszög is derékszögű, tehát a G pont az F ponttól is $\frac{1}{2}$ egység távolságra van.

Így bármelyik felezőpont eleme az E és az F pontoktól egyaránt $\frac{1}{2}$ egység távolságra levő pontok halmazának. Ez két $\frac{1}{2}$ egység sugarú gömb metszete, azaz egy k kör, aminek a középpontja az EF szakasz felezőpontja, síkja merőleges erre a szakaszra, sugara pedig

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{EF}{2}\right)^2}.$$

Be kell még látni, hogy a k körnek az összes pontja előáll egy megfelelő AB szakasz felezőpontjaként.

Az alapjelöléseket megtartva, jelölje az EF szakasz felezőpontját I (*2. ábra*).



2. ábra

Jelölje H a kör egy tetszőleges pontját. Ekkor $EH=\frac{1}{2}\ge EI$. Ha $EI=\frac{1}{2}$, akkor $H=I$. Egyébként az e egyenesen még egy olyan pont található, amely a H ponttól $\frac{1}{2}$ távolságra van, jelölje ezt a pontot A, az A pontnak a H-ra való tükörképét pedig B. Az EF egyenesre E-ben, illetve F-ben állított merőleges síkokat jelölje rendre $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$. Az e egyenes nyilván $\mathcal{S}$-ben, az f pedig $\mathcal{T}$-ben van. Mivel $\mathcal{T}$ az $\mathcal{S}$-nek H-ra való tükörképe, B a $\mathcal{T}$ síkban van. A tükrözés miatt viszont $BH=HA=\frac{1}{2}=HE$, ezért E illeszkedik az AB szakaszra emelt Thalész-gömbre, azaz BE merőleges e-re. Így B az e-re E-ben emelt merőleges síkban is benne fekszik, ami nyilván az EF és f egyenesek által kifeszített sík. Tehát B rajta van e két sík metszésvonalán, f-en. Mivel $AB=BH+HA=1$, a H pont valóban a keresett mértani helyhez tartozik, ami így az egész k kör.

II. megoldás. Vegyük fel úgy a koordinátarendszert, hogy az e egyenes egybeessen a koordinátarendszer x tengelyével, az f egyenes pedig legyen párhuzamos a z tengellyel és legyen benne az y–z síkban. A két egyenes távolsága legyen a.

Ha $a>1$, akkor a feladatnak nincs értelme.

Ha $a=1$, akkor az AB szakasznak csak egyetlen helyzete lenne lehetséges.

Tehát $a<1$.

A fentiek alapján az e egyenes egyenletrendszere:

$$y=0,\qquad z=0;$$

az f egyenes egyenletrendszere pedig

$$x = 0, \qquad y = a.$$

Legyen A az e egyenesen és B az f-en, és jelölje az AB szakasz felezőpontját $F(x_3, y_3, z_3)$. Ekkor az A és B pontok koordinátái: $A(x_1, 0, 0)$, $B(0, a, z_2)$, így F koordinátái $F\left(\frac{x_1}{2}, \frac{a}{2}, \frac{z_2}{2}\right)$, azaz $x_1 = 2x_3$, $z_2 = 2z_3$.

Mivel $AB = 1$, azért

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|(-x_1, a, z_2)\right| = \sqrt{x_1^2 + a^2 + z_2^2} = 1,$$

ahonnan $4x_3^2 + a^2 + 4z_3^2 = 1$, vagyis

$$x_3^2 + z_3^2 = \frac{1-a^2}{4}.$$

Tehát az F pontok koordinátái kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$x^2 + z^2 = \frac{1-a^2}{4}, \qquad y = \frac{a}{2}.$$

Az F pontok tehát illeszkednek az $O\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$ középpontú, $\frac{\sqrt{1-a^2}}{2}$ sugarú körre, mely az $y = \frac{a}{2}$ egyenletű (az x–y síkkal párhuzamos) síkban fekszik.

Azt is meg kell még vizsgálnunk, hogy a kör mely pontjai kaphatók meg egy megfelelően választott AB szakasz felezőpontjaként.

Ha P a kör egy pontja, akkor koordinátái $P\left(x_p, \frac{a}{2}, z_p\right)$, és teljesül, hogy

$$x_p^2 + z_p^2 = \frac{1-a^2}{4}.$$

Olyan $A(x_1, 0, 0)$ és $B(0, a, z_2)$ pontokat keresünk, melyek illeszkednek az e, illetve az f egyenesre, és melyekre AB felezőpontja a P pont. Ekkor $x_p = \frac{x_1}{2}$, $z_p = \frac{z_2}{2}$, vagyis $x_1 = 2x_p$ és $z_2 = 2z_p$, és így

$$AB = x_1^2 + a^2 + z_2^2 = 4x_p^2 + a^2 + 4z_p^2 = 4 \cdot \frac{1-a^2}{4} + a^2 = 1 - a^2 + a^2 = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy a kör tetszőleges P pontjához található megfelelő AB szakasz.

Az F pontok mértani helye tehát egy $O\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$ középpontú, $\frac{\sqrt{1-a^2}}{2}$ sugarú kör, mely az $y = \frac{a}{2}$ egyenletű (az x–y síkkal párhuzamos) síkban fekszik.

Megjegyzés. Csak páran bizonyították be, hogy a kör minden pontja jó. De azok is megkapták a 4 pontot, akik ezt nem tették meg.