

**I. megoldás.**

$$\begin{aligned}
a_{2006} &= a_{1003} = 1 - a_{501} = 1 - (1 - a_{250}) = a_{125} = 1 - a_{62} = 1 - a_{31} = \\
&= 1 - (1 - a_{15}) = a_{15} = 1 - a_7 = 1 - (1 - a_3) = a_3 = 1 - a_1 = 0.
\end{aligned}$$

**II. megoldás.** Megmutatjuk, hogy az  $a_n$  sorozat egyenlő a következő szabállyal értelmezett  $b_n$  sorozattal:

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ 2-es számrendszerbeli felírásában páratlan sok 1-es van;} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nyilván  $b_1 = 1$ , hiszen az 1 felírásához egyetlen 1-es szükséges. Az  $n$  szám 2-es számrendszerbeli alakjából a  $2n$  felírását úgy kaphatjuk, hogy a számjegysor végére egy nullát illesztünk; az 1-esek száma ezzel nem változik, így  $b_{2n} = b_n$ . Végül  $(2n+1)$ -nek a 2-es számrendszerbeli alakja a  $2n$ -ből az 1 hozzáadásával nyerhető; az utóbbi – mint láttuk – nullára végződik, tehát 1-et hozzáadva az utolsó nulla számjegy 1-esre változik, ezzel az 1-esek száma eggyel nő, az 1-esek számának paritása éppen az ellenkező lesz. Így  $b_{2n+1} = 1 - b_{2n} = 1 - b_n$ . A  $b_n$  sorozat ugyanannak a rekurciónak és kezdeti feltételnek tesz eleget, mint az  $a_n$  sorozat, ezért  $a_n = b_n$ , minden  $n$ -re. A 2006 felírása a 2-es számrendszerben 11111010110, így  $a_{2006} = b_{2006} = 0$ .