

1. megoldás. Azt mondjuk, hogy K' a H megengedett részhalmaza, ha K' -nek minden függőleges egyenesen legfeljebb két pontja van (tehát vízszintes egyenesen lehet akár több is), és a K' pontjait összekötő tengelypárhuzamos szakaszok lefedik H minden pontját. Létezik megengedett halmaz: ilyen K' -t alkotnak például H mindazon pontjai, amelyek a saját függőleges egyenesükön legalsók vagy legfelsők, hiszen ekkor már a K' pontjai meghatározta függőleges szakaszok lefedik H minden pontját.

Legyen K egy olyan megengedett halmaz, amelyre a K pontjait összekötő függőleges (esetleg ponttá fajuló) zárt szakaszok által lefedett H -beli pontok száma minimális. Állítjuk, hogy ez a K kielégíti a feladat követelményeit. A K halmaz megengedettsége miatt mindössze azt kell belátnunk, hogy K -nak minden vízszintes egyenesen legfeljebb két pontja van.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy K három pontja, mondjuk p , q és r egy vízszintes egyenesre esnek úgy, hogy a q a p és az r között van. Ha a q pontot tartalmazó függőleges egyenesen K -nak nincs más pontja, akkor legyen $K' = K \setminus \{q\}$. Ha van, akkor pontosan egy van (mondjuk s). Legyen q' a qs nyílt félegyenesnek a q végponthoz legközelebbi H -beli pontja (ilyen van, mert $s \in K \subseteq H$), és legyen $K' = K \setminus \{q\} \cup \{q'\}$. Mindkét esetben $K' \subseteq H$, K' -nek minden függőleges egyenesen legfeljebb két pontja van, és a K' pontjait összekötő tengelypárhuzamos szakaszok lefedik $H \setminus K'$ minden pontját. Ráadásul a K' pontjait összekötő függőleges (esetleg ponttá fajuló) zárt szakaszok által lefedett H -beli pontok száma kisebb, mint ugyanez a szám a K esetén. Ez nem lehetséges.

A kapott ellentmondás igazolja, hogy a K halmaz a feladatban megfogalmazott mindkét feltételt teljesíti. $\square$

A fenti érvelés bár igazolja a feladat állítását, nem ad jól használható algoritmust egy megfelelő K halmaz megtalálására. Az alábbi megoldás ezzel is szolgál.

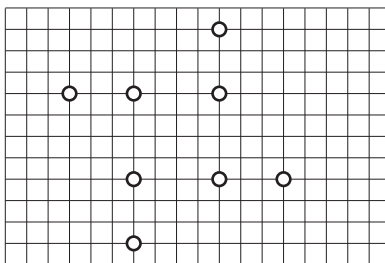
2. megoldás. A H halmaz mérete szerinti induktióval bizonyítunk. Világos, hogy ha $|H| = 1$, akkor $K = H$ teljesíti a feladatbeli feltételeket. Tegyük fel, hogy legfeljebb n pontú H halmazra már igazoltuk az állítást, és legyen a H halmaznak $n + 1$ pontja.

Alkossák a K^* halmazt a H azon pontjai, amelyek a saját függőleges egyenesükön legalsók vagy legfelsők. Világos, hogy K^* teljesíti a feladat (b) feltételét. Ha az (a) feltétel is teljesül K^* -ra, akkor készen vagyunk: $K = K^*$ megfelelő. Ha azonban az (a) feltétel nem teljesül, akkor ennek az az oka, hogy van K^* -nak olyan q pontja, hogy a q vízszintes egyenesen q -tól balra és jobbra is van K^* -nak pontja, mondjuk p és r .

Az induktív feltevés szerint az n pontú $H \setminus \{q\}$ halmaznak létezik olyan K részhalmaza, ami minden tengelypárhuzamos egyenesen legfeljebb két pontot tartalmaz, és $H \setminus \{q\}$ minden pontját lefedik a K által meghatározott tengelypárhuzamos szakaszok. Állítjuk, hogy ugyanez a K halmaz H -hoz is megfelelő. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy q rajta van egy K -beli végpontokkal rendelkező vízszintes szakaszon. Vizsgáljuk a p pontot! Mivel p egy függőleges egyenes H -beli legalsó vagy legfelső pontja, azért vagy $p \in K$, vagy p egy K -végpontú vízszintes szakaszon található, tehát q vízszintes egyenesén van p -tól balra K -nak pontja. Hasonlóan, ha $r \notin K$, akkor r is csak egy K meghatározta vízszintes szakaszon lehet, így K -nak r -tól jobbra is van pontja. Azt kaptuk, hogy q csakugyan egy K végpontú vízszintes szakasz belsejében van, tehát K valóban megfelel a feladat feltételeinek, vagyis az állítás $n + 1$ pontú halmazokra is igaz. Ezzel az induktív lépést igazoltuk, a bizonyítást befejeztük. $\square$

Megjegyzések. 1. A 2. megoldásból úgy kaphatunk hatékony algoritmust a K halmaz keresésére, hogy első lépésben képezzük a K^* halmazt. Ha K^* nem alkalmas K -nak a bizonyításbeli q pontja miatt, akkor a $H \setminus \{q\}$ halmazra rekurzívan meghívjuk ugyanezt az algoritmust. Így legfeljebb $|H| - 1$ alkalommal képezve a megfelelő K^* halmazt, előbbutóbb egy keresett K -t kapunk. (Az is könnyen látható, hogy nem kell egyenként elhagyni a q pontokat: megtehetjük azt is, hogy H -ból egyszerre hagyjuk el K^* összes olyan pontját, ami K^* -beli végpontokkal rendelkező vízszintes szakasz belsejében van. Így az algoritmus gyorsabban véget ér.)

2. Több hamis bizonyítás érkezett a feladatra. Legtöbbjük módszeréből az is következne, hogy tetszőleges H halmazhoz egyértelműen létezik a keresett K . A *példa* mutatja, hogy ez koránt sincs így.



3. Érdekes tulajdonsága a fenti megoldásokban konstruált K halmaznak, hogy ha egy K' halmaz rendelkezik a feladatbeli (a) és (b) tulajdonságokkal, akkor minden K' -beli végpontokkal rendelkező függőleges szakasz része egy K meghatározta függőleges szakasznak, továbbá minden K meghatározta vízszintes szakasz része egy K' -beli végpontokkal rendelkező vízszintes szakasznak. Más szóval K a „legmagasabb” és egyben „legkeskenyebb” a kívánt tulajdonságú halmazok között. Természetesen ha a 90° -kal elforgatott ábrán végezzük el a konstrukciót (azaz a függőleges és vízszintes szavakat felcseréljük a bizonyításban), akkor a „legalacsonyabb” és „legszélesebb” megoldást kapjuk meg.

4. A feladat szoros rokonságot mutat *Gale* és *Shapley* (sajnos nem eléggé) ismert „stabil házassági” tételével.