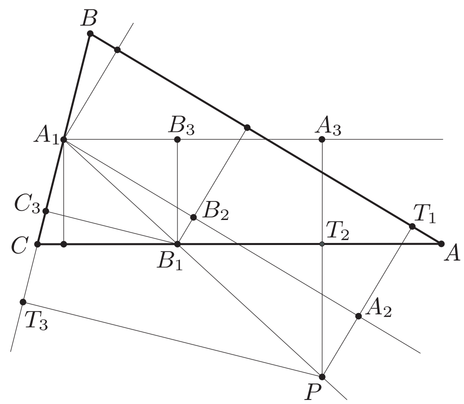
Megoldás. Az *1. ábra* szerint a P pont AB, AC és BC egyenesekre vett merőleges vetülete legyen rendre T_1, T_2, T_3. Az A_1 ponton keresztül húzzunk párhuzamosakat AB-vel és AC-vel; a PT_1 egyenesnek az előbbi párhuzamossal való metszéspontja legyen A_2, a PT_2 egyenesnek az utóbbival való metszéspontja pedig A_3. A B_1 ponton keresztül húzzunk párhuzamost PT_1-gyel, így kapjuk az A_1A_2 egyenesen a B_2 pontot, majd B_1-en keresztül a PT_2 egyenessel húzott párhuzamos és az A_1A_3 egyenes metszéspontjaként a B_3 pontot.



1. ábra

Mivel A_1 és B_1 szögfelező pontok, a háromszög szomszédos oldalegyeneseitől mért távolságaik egyenlők. Legyen az A_1 pont távolsága az AB és AC egyenesektől h_1, a B_1 pont távolsága az AB és BC egyenesektől h_2.

Az $A_1B_1B_2$ és A_1PA_2 háromszögek hasonlóak, mert B_1B_2 párhuzamos PA_2-vel, a másik két oldalegyenesük pedig megegyezik.

A hasonlóság aránya:

$$\frac{B_1B_2}{PA_2} = \frac{A_1B_1}{A_1P},$$

de $B_1B_2 = |h_2 - h_1|$, ezért

$$\frac{|h_2 - h_1|}{PA_2} = \frac{A_1B_1}{A_1P}, \quad \text{innen} \quad PA_2 = \frac{A_1P}{A_1B_1}|h_2 - h_1|. \tag{1}$$

Másrészt az $A_1B_1B_3$ és A_1PA_3 háromszögek hasonlóságából ugyanígy felírható:

$$\frac{PT_2 + h_1}{h_1} = \frac{A_1P}{A_1B_1}, \quad PT_1 = T_1A_2 + PA_2 = h_1 + \frac{A_1P}{A_1B_1}(h_2 - h_1). \tag{2}$$

(Természetesen, ha P belső pontja T_1A_2-nek, akkor

$$PT_1 = h_1 - \frac{A_1P}{A_1B_1}(h_1 - h_2),$$

mivel akkor $h_1 \geq h_2$ és $PT_1 < T_1A_2 = h_1$, azaz PT_1-re ugyanazt a kifejezést kapjuk.)

(2)-ből kifejezve PT_2-t: $PT_2 = h_1\dfrac{A_1P}{A_1B_1} - h_1$, amiből

$$PT_1 + PT_2 = h_1 + \frac{A_1P}{A_1B_1}(h_2 - h_1) + h_1\frac{A_1P}{A_1B_1} - h_1 = \frac{A_1P}{A_1B_1}h_2.$$

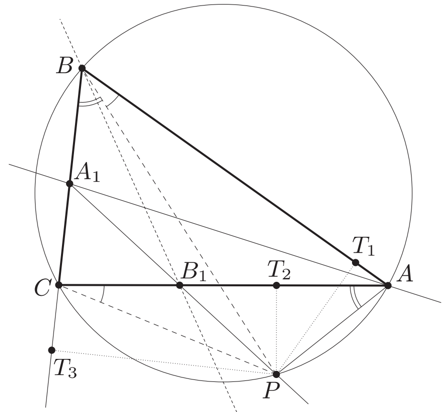
Végül az $A_1C_3B_1$ és A_1T_3P háromszögek hasonlóságából felírható:

$$\frac{PT_3}{B_1C_3} = \frac{A_1P}{A_1B_1}, \quad \text{innen} \quad PT_3 = B_1C_3\frac{A_1P}{A_1B_1} = h_2\frac{A_1P}{A_1B_1}.$$

Összegezve:

$$PT_1 + PT_2 = PT_3. \tag{3}$$

Tekintsük most a PAT_2 és PBT_3 háromszögeket (*2. ábra*). A $PABC$ húrnégyszögben $PAC\sphericalangle = PAT_2\sphericalangle = PBC\sphericalangle = PBT_3\sphericalangle$, mert azonos ívhez tartozó kerületi szögek. Ebből következik, hogy a PAT_2 és PBT_3 háromszögek is hasonlóak, mert a derékszögeken kívül egy további szögük is megegyezik.



2. ábra

Ekkor a megfelelő oldalak aránya: $\dfrac{PT_3}{PB} = \dfrac{PT_2}{PA}$, (3)-at felhasználva:

$$\frac{PT_1 + PT_2}{PB} = \frac{PT_2}{PA}. \tag{4}$$

Szintén a $PABC$ húrnégyszögben $ABP\sphericalangle = T_1BP\sphericalangle = ACP\sphericalangle = T_2CP\sphericalangle$, mert azonos ívhez tartozó kerületi szögek, vagyis a PT_1B és PT_2C háromszögek is hasonlóak, mert a derékszögeken kívül egy további szögük is megegyezik.

A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{PT_2}{PC} = \frac{PT_1}{PB}, \quad \text{innen:} \quad PT_1 = \frac{PB}{PC} PT_2. \tag{5}$$

Most PT_1 (5)-beli értékét írjuk be (4)-be PT_1 helyére:

$$\frac{\frac{PB}{PC} \cdot PT_2 + PT_2}{PB} = \frac{PT_2}{PA},$$

ahol $PT_2 \neq 0$-val egyszerűsítve:

$$\frac{\frac{PB}{PC} + 1}{PB} = \frac{1}{PA},$$

majd átalakítva: $\dfrac{1}{PC} + \dfrac{1}{PB} = \dfrac{1}{PA}$, és ezt kellett bizonyítani.