

**Megoldás.** A játéknak vizsgáljuk azt az általánosabb változatát, amelyben akárhány kupac, és mindegyik kupacban tetszőleges számú kavics lehet. A kavicsok számát jelölje  $x$ , a kupacok számát  $y$ . Ha egy kupacban csak egyetlen kavics van, azt nevezzük „kis” kupacnak, a többit pedig „nagy” kupacnak, utóbbiak számát jelölje  $z$ . Először azt mutatjuk meg, hogy a játék biztosan véget ér, bárhol is játszik Anna és Balázs. Mivel  $2x \geq x \geq y$ , azért  $2x - y$  nemnegatív egész szám. Belátjuk, hogy  $2x - y$  értéke minden lépés során csökken. Ha a soron következő játékos egy kupacot két kisebb kupacra oszt, akkor  $x$  nem változik,  $y$  pedig 1-gyel nő, így  $2x - y$  értéke valóban csökken. Ha pedig egy kupacból elvesz egyetlen kavicsot, akkor  $x$  1-gyel csökken,  $y$  pedig vagy nem változik, vagy 1-gyel csökken, de  $2x - y$  értéke mindkét esetben csökken. Mivel  $2x - y$  értéke minden lépésben legalább 1-gyel csökken, de végig nemnegatív, a játék véges sok lépésben véget ér.

Azt fogjuk  $2x - y$  szerinti teljes indukcióval bizonyítani, hogy pontosan akkor van Balázsnak, vagyis a második játékosnak nyerő stratégiája, ha az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  számok közül vagy mindegyik páros, vagy mindegyik páratlan; egyébként Annának, vagyis az első játékosnak van nyerő stratégiája. Ha  $2x - y = 0$ , akkor  $x = y = z = 0$ , vagyis az első játékos nem tud lépni, és így valóban a második játékosnak van nyerő stratégiája.

Tegyük fel, hogy  $2x - y = n \geq 1$ , és az állítást már minden olyan játékra igazoltuk, ahol  $2x - y < n$ . Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor  $x$ ,  $y$  és  $z$  paritása megegyezik. Könnyen meggondolható, hogy bármit is lép az első játékos, a három mennyiség között lesz olyan, amelyik változatlan marad, és lesz olyan is, amelynek értéke pontosan 1-gyel változik, így megváltozik a paritása. Az így keletkező új játékban az indukciós feltevés szerint az első játékosnak van nyerő stratégiája, vagyis az eredeti játékban a másodiknak, ahogyan azt állítottuk.

Tegyük fel végül, hogy  $x$ ,  $y$  és  $z$  nem azonos paritásúak. Elegendő azt megmutatni, hogy az első játékos tud úgy lépni, hogy ezután  $x$ ,  $y$ ,  $z$  paritása megegyező legyen, hiszen ezután alkalmazhatja a folytatásban az új játék második játékosának nyerő stratégiáját. Ha  $x$  és  $y$  paritása megegyezik (de  $z$  paritásával ellentétes), akkor  $y \neq z$ , tehát van legalább egy kis kupac is. Az első játékos egy kis kupacból elvesz egy kavicsot, így  $x$  és  $y$  értéke 1-gyel csökken,  $z$  pedig nem változik, ezután a három mennyiség paritása megegyezik.

Ha  $x$  és  $z$  paritása egyezik meg, akkor  $x \neq y$ , tehát van legalább egy nagy kupac. Ha van olyan nagy kupac is, amelyben legalább 3 kavics van, akkor az első játékos kettéválasztja egy kis és egy nagy kupacra, ekkor  $y$  értéke 1-gyel nő, miközben  $x$  és  $z$  értéke változatlan marad. Ha ilyen nincs, akkor mindegyik nagy kupacban pontosan 2 kavics van. Az első játékos egy nagy – tehát pontosan két kavicsot tartalmazó – kupacból elvesz egy kavicsot, így  $x$  és  $z$  értéke 1-gyel csökken, miközben  $y$  értéke nem változik. Az első játékos mindkét esetben el tudta érni, hogy lépése után a három mennyiség paritása egyezzen meg.

Végül, ha  $y$  és  $z$  paritása azonos, akkor megint csak van legalább egy nagy kupac. Ha van legalább 3 kavicsot tartalmazó nagy kupac is, akkor az első játékos egy ilyen kupacból elvesz egy kavicsot, így a lépés során  $y$  és  $z$  nem változik, míg  $x$  1-gyel csökken. Ha viszont minden egyes nagy kupacban pontosan 2 kavics van, akkor az első játékos egy ilyen kupacot két kis kupacra oszt. Így  $x$  értéke nem változik,  $y$  értéke 1-gyel nő,  $z$  értéke pedig 1-gyel csökken. Az első játékos ismét mindkét esetben el tudta érni, hogy lépése után a három mennyiség paritása azonos legyen. Ezzel befejeztük az indukciós lépés igazolását.

Teljes indukcióval beláttuk, hogy ha  $x$ ,  $y$ ,  $z$  azonos paritásúak, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája, különben pedig az elsőnek. A feladatban szereplő játék esetén  $y = 10$ ,  $z = 9$ , így az első játékosnak, vagyis Annának van nyerő stratégiája.