Megoldás. A sorozat tagjai a képzési szabály miatt nyilvánvalóan pozitív egészek. Legyen (minden n-re) $d_n = (a_n, a_{n+1})$, ekkor d_{n+1} osztja a_{n+1}-et és a_{n+2}-t; ezért osztója $d_n a_{n+2} - a_{n+1} = a_n$-nek is. Így, $d_{n+1} \mid a_n$ és $d_{n+1} \mid a_{n+1}$ miatt d_{n+1} osztója az a_n és a_{n+1} legnagyobb közös osztójának, d_n-nek is. Speciálisan kapjuk, hogy

$$d_{n+1} \leq d_n,$$

minden n-re.

Tegyük fel, hogy az (a_k) sorozat periodikus; ekkor a szomszédos tagok legnagyobb közös osztóiból álló (d_k) sorozat is periodikus. Láttuk, hogy ez a sorozat monoton fogyó, ezért csak konstans lehet:

$$d_1 = d_2 = \ldots := d.$$

Ha $d = 1$, akkor $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n > a_{n+1}$ minden n-re, tehát a sorozat (a második tagjától kezdve) szigorúan monoton növő, így nem lehet periodikus. Ha $d \geq 3$, akkor

$$a_{n+3} + a_{n+2} = \frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{d} + \frac{a_{n+1} + a_n}{d} = \frac{\frac{a_{n+1}+a_n}{d} + a_{n+1}}{d} + \frac{a_{n+1} + a_n}{d} =$$

$$= \left(\frac{1}{d^2} + \frac{2}{d}\right)a_{n+1} + \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d}\right)a_n < a_{n+1} + a_n$$

szerint az $(a_{k+1} + a_k)$ sorozatnak van olyan részsorozata, amely szigorúan monoton fogyó, így maga a sorozat nem periodikus. Akkor viszont az (a_k) sorozat sem lehet periodikus, feltételünkkel ellentétben. Ezzel beláttuk, hogy d értéke csak 2 lehet. A sorozat elemeinek képzési szabálya tehát a következő:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2},$$

a sorozat minden tagja a megelőző kettőnek a számtani közepe. Ebből szemléletesen látszik (illetve a fenti formulából egyszerű átrendezéssel is adódik), hogy a sorozat szomszédos tagjainak különbsége minden lépésben feleződik:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left|\frac{a_{n+1} - a_n}{2}\right|.$$

Ha $a_1 \neq a_2$, akkor $|a_{n+2} - a_{n+1}| = \dfrac{|a_2 - a_1|}{2^n}$ mutatja, hogy az n elég nagy értékeire $|a_{n+2} - a_{n+1}|$ nem lehet egész, ellentmondva annak, hogy az (a_k) sorozat elemei (pozitív) egészek. Így $a_1 = a_2$, tehát $(a_1, a_2) = 2$ miatt $a_1 = a_2 = 2$. Ebből következik, hogy a sorozat minden eleme is 2; ebben az egyetlen lehetséges esetben a (konstans 2) sorozat valóban periodikus.