

Megoldás. Tegyük fel, hogy az egymást követő $n, n + 1, n + 2, n + 3$ pozitív egészek szorzata köbszám. Mivel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ nem köbszám, $n \geq 2$. A szorzat prímtényezős alakjában mindegyik prím kitevője 3-mal osztható. Legyen p egy ilyen prímszám, ekkor a négy szám valamelyike osztható p -vel. Ha $p > 3$, akkor a négy közül csak egyetlen szám lehet p -vel osztható, ellenkező esetben p osztaná a két szám különbségét, ami legfeljebb 3. Így a négy szám bármelyikének prímtényezős alakjában a 3-nál nagyobb prímek kitevője 3-mal osztható. Speciálisan, ha a számok valamelyike sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható, akkor maga is köbszám. Ilyen pedig biztosan létezik, hiszen a négy, egymást követő szám közül kettő páratlan, és – különbségük 2 lévén – legalább az egyikük nem osztható 3-mal. Ebből következik, hogy a négy szám szorzatát e köbszámmal elosztva a további három szám szorzataként is köbszámot kapunk. Legyen ez a három szám a, b és c , ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $n^3 < n(n+1)(n+2) \leq abc \leq (n+1)(n+2)(n+3) < (n+2)^3$. Ez azt jelenti, hogy abc csak úgy lehet köbszám, ha $abc = (n+1)^3$. Azonban – minden $n \geq 2$ egészre –

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+1)^3} &= \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1, \\ \frac{n(n+1)(n+3)}{(n+1)^3} &= \frac{n^2+3n}{n^2+2n+1} > 1, \\ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+1)^3} &> 1, \\ \frac{n(n+2)(n+3)}{(n+1)^3} &= \frac{n^3+5n^2+6n}{n^3+3n^2+3n+1} > 1,\end{aligned}$$

azaz abc szóba jövő értékei közül három nagyobb, egy pedig kisebb, mint $(n+1)^3$. Tehát négy egymást követő pozitív egész szám szorzata nem lehet köbszám.