

**I. megoldás.** A sorszámozás ciklikus jellegét követve vezessük be az  $x_{n+1} = x_1$  jelölést. Legyen  $i$  egy tetszőlegesen rögzített érték az  $1, 2, \dots, n$  közül, és vizsgáljuk meg az  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$  összeg viselkedését abban az esetben, ha a változók a  $\pm 1$  értékeket vehetik fel, és egy ilyen kiosztást követően  $x_i$  előjelét az ellenkezőjére változtatjuk. Az  $x_i$  megváltozása az összegnek csupán két (szomszédos) tagját befolyásolja, ezért elegendő az  $x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1}$  sorsát nyomon követni. Az  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  értéke 1 vagy  $-1$ , így a szorzatok értéke is csak 1 vagy  $-1$  lehet; ennek megfelelően  $x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1}$  csak a  $-2, 0$  vagy  $2$  értékek valamelyikét veheti fel. A két szorzat összege pontosan akkor  $-2$ , ha mindkét szorzat  $-1$ , ami azt jelenti, hogy  $x_i$  előjele  $x_{i-1}$  és  $x_{i+1}$  előjelével is ellentétes. Így, ha  $x_i$  előjelét az ellenkezőjére változtatjuk, akkor  $x_{i-1} = x_i = x_{i+1}$  folytán az összeg értéke  $-2$ -ről  $2$ -re változik. Az eseménysort visszafelé lepergetve elmondhatjuk, hogy ha kezdetben  $x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1} = 2$  – ami akkor és csak akkor teljesül, ha  $x_{i-1} = x_i = x_{i+1} = 1$  – úgy az  $x_i$  előjelének megváltoztatása után az összeg új értéke  $-2$ . Hasonlóan látható, illetve formális logikai következtetéssel is adódik, hogy ha  $x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1} = 0$ , akkor az összeg értéke az  $x_i$  ellentettjével is  $0$  marad. Ezzel beláttuk, hogy az  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$  kifejezés értéke mindig  $0$ -val vagy  $\pm 4$ -gyel változik, ha az egyik  $x_i$  helyett a  $-1$ -szeresét szerepeltetjük.

Tegyük fel ezután, hogy  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$ . Változtassuk meg egyenként a negatív  $x_i$  értékeket  $+1$ -re; így végül mindegyikük  $1$  lévén,  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = n$  lesz. A változás minden lépésben  $4$ -gyel osztható volt, ezért a végső eltérés,  $n - 0 = n$  is osztható  $4$ -gyel.

Megfordítva: tegyük fel, hogy  $n$  osztható  $4$ -gyel, azaz  $n = 4k$ . Legyen ekkor  $x_{4t+1} = 1, x_{4t+2} = -1, x_{4t+3} = 1, x_{4t+4} = 1$  ( $t = 0, 1, \dots, k$  mellett). Ekkor az  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$  összegben két  $-1$  értékű szorzatot mindig két  $1$  értékű követ, ezért az összeg nulla.

Tehát a feladat követelményét pontosan a  $4$ -gyel osztható  $n$  számok elégítik ki.

*Megjegyzés.* Abban az esetben, amikor az  $n$  osztható  $4$ -gyel, számos más konstrukcióval is elérhető, hogy a szóban forgó összeg értéke nulla legyen; ezeket azonban nem részletezzük. Viszont a megoldás azon részére, hogy a  $4 \mid n$  feltétel szükséges, egy további megközelítést is mutatunk.

**II. megoldás.** Az  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1$  sorozatban akkor beszélünk *jelváltásról*, ha valamilyen  $1 \leq j \leq n$ -re az  $x_j$  és  $x_{j+1}$  előjele különböző. A jelváltás annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az  $x_jx_{j+1}$  szorzat értéke  $-1$  legyen. Ha a jelváltások száma  $V$ , akkor tehát  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = (-1)^V \cdot V + 1 \cdot (n - V) = n - 2V$ . Így, ha a fenti kifejezés értéke  $0$ , akkor  $n = 2V$  páros. Másrészt a sorozat első és utolsó eleme egyenlő, ezért a jelváltások  $V$  száma szükségképpen páros, azaz  $n$  osztható  $4$ -gyel.