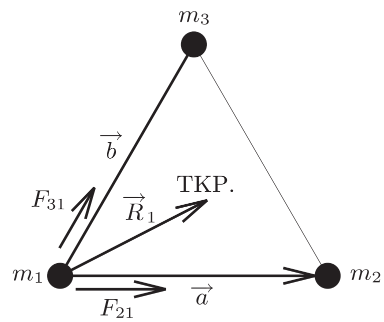
Megoldás. *a*) Jelöljük az m_1 tömegű korongtól az m_2 tömegűhöz mutató vektort $\vec{a}$-val, az m_3-hoz mutatót pedig $\vec{b}$-vel az *ábrán* látható módon.



Egy pontrendszer tömegközéppontjába mutató vektor általánosan az

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

képletből határozható meg. Jelen esetben a tömegközéppont vektora az m_1 tömegű testtől mérve

$$\vec{R}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{a} + \frac{m_3}{M}\vec{b},$$

ahol $M = m_1 + m_2 + m_3$ a rendszer össztömege. Ennek a vektornak a négyzete

$$R_1^2 = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 L^2 + \left(\frac{m_3}{M}\right)^2 L^2 + 2\frac{m_2 m_3}{M^2}\vec{a}\vec{b}.$$

Tekintettel arra, hogy a három korong szabályos háromszöget alkot, az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok 60°-os szöget zárnak be egymással, a skalárszorzatuk

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60° = \frac{1}{2} L^2.$$

Megjegyzés. Ugyanezt az összefüggést megkaphatjuk a harmadik oldal hosszát megadó képletből is:

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = L^2 + L^2 + 2\vec{a}\vec{b} = L^2.$$

A fenti képleteket összevetve a tömegközéppont és az m_1 tömegű test távolságára ez adódik:

$$R_1 = \frac{\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3}}{M} L = 0{,}42 \text{ m}.$$

Hasonló módon (a szerepek felcserélésével) kapjuk a tömegközéppont és a másik két korong távolságát is:

$$R_2 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3}}{M} L = 0{,}38 \text{ m} \quad \text{és} \quad \mathrm{R}_3 = \frac{\sqrt{\mathrm{m}_1^2 + \mathrm{m}_2^2 + \mathrm{m}_1 \mathrm{m}_2}}{\mathrm{M}} \mathrm{L} = 0{,}26 \text{ m}.$$

b) A tömegpontnak tekinthető korongok egyenletes körmozgást végeznek a tömegközéppont körül. Ennek megfelelően például az m_1 tömegű test mozgásegyenlete $m_1\omega^2\vec{R}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$, ahol az egyenlet jobb oldalán szereplő két vektor a 2-es és a 3-as jelzésű testnek az 1-esre kifejtett erőhatását jelöli. Ezek iránya a testeket összekötő fonalak irányával megegyező, tehát

$$\vec{F}_{21} = F_{21} \cdot \frac{\vec{a}}{L} \qquad \text{és} \qquad \vec{F}_{31} = F_{31} \cdot \frac{\vec{b}}{L},$$

ahol a nyíl nélküli mennyiségek a megfelelő vektorok nagyságát jelölik.

A fenti kifejezést a mozgásegyenletbe helyettesítve és az $\vec{R}_1$ konkrét alakját megadó kifejezést is felhasználva kapjuk:

$$m_1\omega^2 \left(\frac{m_2}{M}\vec{a} + \frac{m_3}{M}\vec{b}\right) = F_{21} \cdot \frac{\vec{a}}{L} + F_{31} \cdot \frac{\vec{b}}{L}.$$

Mivel az egyenlet jobb és bal oldalán szereplő vektorok felbontása $\vec{a}$ és $\vec{b}$ irányú összetevőkre *egyértelmű,* az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha az $\vec{a}$ irányú tagok és a $\vec{b}$ irányú tagok külön-külön megegyeznek. Innen

$$F_{21} = \frac{m_1 m_2}{M} L\omega^2 = 3{,}53 \text{ N}, \qquad \mathrm{F}_{31} = \frac{\mathrm{m}_1 \mathrm{m}_3}{\mathrm{M}} \mathrm{L}\omega^2 = 6{,}12 \text{ N},$$

és végül a harmadik erő (amely a szerepek felcserélésével kapható):

$$F_{23} = \frac{m_2 m_3}{M} L\omega^2 = 9{,}18 \text{ N}.$$