

**I. megoldás.** Mivel  $\operatorname{ctg} 70^\circ = \frac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}$ , így a bizonyítandó egyenlőség ekvivalens a

$$\cos 70^\circ + 4 \cos 70^\circ \sin 70^\circ = \sqrt{3} \sin 70^\circ$$

egyenlettel.  $2 \cos 70^\circ \sin 70^\circ = \sin 140^\circ$ , ezt beírva, 2-vel osztva és rendezve:

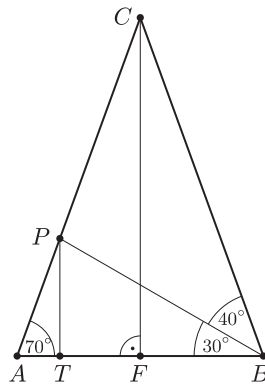
$$\sin 140^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 70^\circ - \frac{1}{2} \cos 70^\circ.$$

Mivel  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$  és  $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ , az addíciós tételt felhasználva

$$\cos 30^\circ \sin 70^\circ - \sin 30^\circ \cos 70^\circ = \sin (70^\circ - 30^\circ) = \sin 40^\circ,$$

ami valóban  $\sin 140^\circ$ , hiszen minden  $\alpha$ -ra  $\sin (180 - \alpha) = \sin \alpha$ .

**II. megoldás.** A feladat a  $70^\circ$ -os szögről szól. Vegyünk fel egy egyenlő szárú háromszöget, melynek alapon lévő szögei  $70^\circ$ -osak. Így geometriai értelmezést adhatunk a feladatnak. Legyen  $P$  a háromszög  $AC$  szárán az a pont, melyre  $\angle ABP < 30^\circ$ -os. Állítsunk merőlegest a  $P$  pontból az  $AB$  alapra, a talppont legyen  $T$ ,  $AB$  felezőpontja pedig az  $F$  pont.



Legyen  $PT = 1$ , ekkor

$$PB = \frac{PT}{\sin 30^\circ} = 2, \quad TB = PB \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\frac{AT}{PT} = \operatorname{ctg} 70^\circ.$$

Legyen  $x = AT = PT \cdot \operatorname{ctg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 70^\circ$ .

Az  $ATP$  háromszögben a Pitagorasz-tételt használva:  $AP = \sqrt{x^2 + 1}$ .

$$AB = AT + TB = x + \sqrt{3}, \quad AF = \frac{AB}{2} = \frac{x + \sqrt{3}}{2},$$

$$TF = AF - AT = \frac{x + \sqrt{3}}{2} - x = \frac{\sqrt{3} - x}{2}.$$

A  $BPC$  háromszög egyenlő szárú, így  $PC = PB = 2$ .

A párhuzamos szelők tételének következménye szerint:

$$\frac{AT}{AP} = \frac{TF}{PC}, \quad \text{azaz} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3} - x}{4}.$$

Vagyis sikerült belátnunk, hogy ha  $x = \operatorname{ctg} 70^\circ$ , akkor

$$x + 4 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{3}.$$

Mivel  $\cos 70^\circ = \frac{AT}{AP} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ , azért ez éppen a bizonyítandó állítás:

$$\operatorname{ctg} 70^\circ + 4 \cos 70^\circ = \sqrt{3}.$$