

I. megoldás. A $4Rs_a \geq b^2 + c^2$ egyenlőtlenséget fogjuk igazolni. Mivel a betűknek nincs kitüntetett szerepük, az is igaz, hogy $4Rs_b \geq a^2 + c^2$ és $4Rs_c \geq a^2 + b^2$. A három egyenlőtlenséget összeadva, 2-vel való osztás után nyerjük a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

Mivel $(2s_a)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, a $4Rs_a \geq b^2 + c^2$ egyenlőtlenség ekvivalens a

$$4R^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) \geq (b^2 + c^2)^2$$

egyenlőtlenséggel, amit $(2R)^4$ -nel osztva a szinusz tétel alapján

$$2 \sin^2 \beta + 2 \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha \geq (\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)^2$$

alakra hozhatunk. (A szinusz tétel alábbi alakját használtuk:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.)$$

A $\sin \alpha = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma$ és $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ összefüggések alapján a bal oldali kifejezés

$$\begin{aligned} & 2 \sin^2 \beta + 2 \sin^2 \gamma - \sin^2 \beta \cos^2 \gamma - \cos^2 \beta \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma = \\ & = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma = \\ & = (\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)^2 + (\sin^2 \beta - \sin^4 \beta) + (\sin^2 \gamma - \sin^4 \gamma) - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma = \\ & = (\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)^2 + \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma = \\ & = (\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)^2 + (\sin \beta \cos \beta - \sin \gamma \cos \gamma)^2. \end{aligned}$$

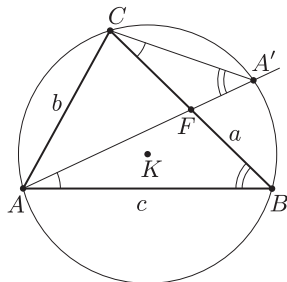
Ez valóban nagyobb vagy egyenlő a jobb oldalon álló kifejezésnél, és egyenlőség pontosan $\sin \beta \cos \beta = \sin \gamma \cos \gamma$ esetén áll fenn, vagyis ha $\sin 2\beta = \sin 2\gamma$.

Igaz tehát a feladatban megfogalmazott egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan $\sin 2\alpha = \sin 2\beta = \sin 2\gamma$ esetén áll fenn. Ez csak úgy lehet, ha $\alpha = \beta = \gamma$, vagyis ha a háromszög szabályos.

A most következő megoldásokban a háromszög köré írható körének középpontját K -val jelöljük, a BC oldal felezőpontja pedig legyen F .

II. megoldás. Az előző megoldáshoz hasonlóan a $4Rs_a \geq b^2 + c^2$ egyenlőtlenséget igazoljuk. Az AF súlyvonal meghosszabbításának a köré írt körrel vett metszéspontja legyen A' . A kerületi szögek tétele szerint $\angle ABF = \angle CA'F$ (mindkét szög az AC ívhez tartozó kerületi szög) és $\angle BAF = \angle A'CF$ (mindkét szög az $A'B$ ívhez tartozó kerületi szög).

Így az ABF és a $CA'F$ háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik egyenlő nagyságúak. A hasonlóság miatt $\frac{A'C}{BA} = \frac{FC}{FA}$, amiből $A'C = \frac{ac}{2s_a}$. Hasonlóan, az ACF és a $BA'F$ háromszögek hasonlóságából kapjuk, hogy $A'B = \frac{ab}{2s_a}$.



Írjuk fel Ptolemaiosz tételét a $BACA'$ húrnégyszögre:

$$AA' \cdot a = A'C \cdot c + A'B \cdot b.$$

Mivel AA' a köré írt kör húrja, így legfeljebb $2R$ hosszúságú. Ezt az észrevételt és korábbi eredményeinket felhasználva a következőt kapjuk:

$$2R \geq AA' = \frac{A'C \cdot c + A'B \cdot b}{a} = \frac{\frac{ac}{2s_a} \cdot c + \frac{ba}{2s_a} \cdot b}{a} = \frac{c^2 + b^2}{2s_a},$$

ezért a $4Rs_a \geq b^2 + c^2$ egyenlőtlenség valóban érvényes.

Egyenlőség pontosan akkor van, ha az ABC háromszög mindegyik súlyvonala $2R$ hosszúságú húrt metsz ki a köré írt körből, vagyis ha mind áthaladnak a köré írt kör középpontján. Ez akkor teljesül, ha a súlypont és a köré írt kör középpontja egybeesik, vagyis ha a háromszög szabályos.

III. megoldás. Mivel K illeszkedik a BC oldal felezőmerőlegesére, a BF és FK vektorok merőlegesek egymásra: BFK derékszögű háromszög, vagy pedig $F = K$. Pitagorasz tétele szerint:

$$KF = \sqrt{KB^2 - BF^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

ez az $F = K$ esetben is igaz.

Az AKF (esetleg elfajuló) háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség szerint $|AF - AK| \leq KF$, azaz

$$|s_a - R| \leq \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

A kapott egyenlőtlenséget négyzetre emelve, majd rendezve:

$$(s_a - R)^2 \leq R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad s_a^2 + \frac{a^2}{4} \leq 2Rs_a.$$

Ugyanígy kapjuk az $s_b^2 + \frac{b^2}{4} \leq 2Rs_b$ és $s_c^2 + \frac{c^2}{4} \leq 2Rs_c$ egyenlőtlenségeket. A három egyenlőtlenséget összeadva az

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \leq 2R(s_a + s_b + s_c)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ismert, hogy egy háromszög súlyvonalainak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegeinek $\frac{3}{4}$ -szeresével. Így

$$\begin{aligned} 2R(s_a + s_b + s_c) &\geq s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} = \\ &= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2, \end{aligned}$$

ami épp a bizonyítandó állítás.

Az előző megoldásban látottakhoz hasonlóan gondolható meg, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha a háromszög szabályos.

IV. megoldás. K -ból az A, B, C csúcsokba mutató vektorok legyenek rendre $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Mivel K a köré írt kör középpontja, az $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ hossza R .

A háromszög BC oldalának felezőpontjából az A csúcsba mutató vektor $\mathbf{x} - \frac{\mathbf{y} + \mathbf{z}}{2}$, ennek hossza pedig s_a . Két vektor skaláris szorzata kisebb, vagy egyenlő, mint a vektorok hosszának szorzata, ezt az észrevételt az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{x} - \frac{\mathbf{y} + \mathbf{z}}{2}$ vektorokra alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\mathbf{x} \cdot \left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{y} + \mathbf{z}}{2}\right) \leq Rs_a, \quad 2\mathbf{x}^2 - \mathbf{xy} - \mathbf{xz} \leq 2Rs_a.$$

Teljesen hasonlóan igazolhatók a

$$2\mathbf{y}^2 - \mathbf{yz} - \mathbf{yx} \leq 2Rs_b \quad \text{és} \quad 2\mathbf{z}^2 - \mathbf{zx} - \mathbf{zy} \leq 2Rs_c$$

egyenlőtlenségek. A három egyenlőtlenséget összeadva, majd a kapott egyenlőtlenség bal oldalát átalakítva éppen az igazolandó állítást kapjuk:

$$2\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{y}^2 + 2\mathbf{z}^2 - 2\mathbf{xy} - 2\mathbf{yz} - 2\mathbf{zx} \leq 2R(s_a + s_b + s_c),$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{z})^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{x})^2 \leq 2R(s_a + s_b + s_c),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2R(s_a + s_b + s_c),$$

hiszen az $\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}, \mathbf{z} - \mathbf{x}$ vektorok hossza rendre c, a, b .

Könnyen meggondolható, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos.