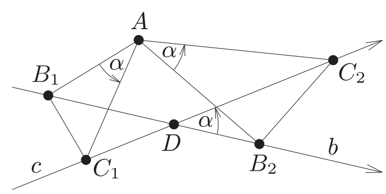
Megoldás. Mivel $A \neq D$, az A, B_1, B_2 pontok nem esnek egy egyenesre, ahogyan az A, C_1, C_2 pontok sem. Tehát az AB_1B_2 és AC_1C_2 háromszögek valóban léteznek. Vegyük az eredeti háromszögek körüljárási irányát pozitívnak. Szükség esetén az indexeket felcserélve feltehetjük, hogy az AB_1C_1 háromszöget A körüli φ szögű forgatva nyújtás viszi az AB_2C_2 háromszögbe, ahol $0 < \varphi < \pi$. Legyen a B_1AC_1 és B_2AC_2 irányított szögek nagysága α, továbbá a hasonlóság miatt

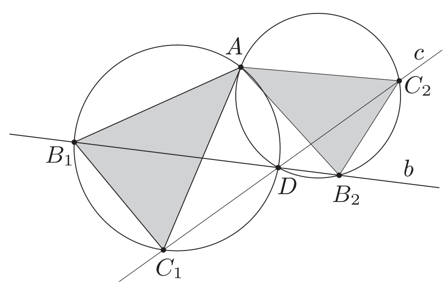
$$\frac{C_1A}{B_1A} = \frac{C_2A}{B_2A} = \lambda.$$

Ekkor az AB_1B_2 háromszöget A körüli, α szögű, λ arányú forgatva nyújtás viszi az AC_1C_2 háromszögbe, ami az első állítást igazolja. Ugyanez a forgatva nyújtás az *1. ábrán* feltüntetett $b = B_1B_2$ irányított egyenest a $c = C_1C_2$ irányított egyenesbe viszi. Ezeket a D pont két részre osztja, melyeket nevezzünk értelemszerűen bal, illetve jobb oldali résznek.

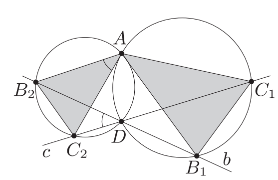


1. ábra

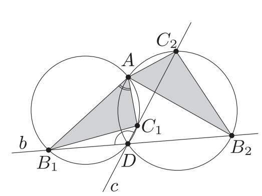
A második állítás igazolásához (*2. ábra*) vegyük figyelembe, hogy az AB_1B_2 és AC_1C_2 háromszögek körüljárási iránya is pozitív. Elegendő azt bizonyítani, hogy az A, B_1, C_1 és D pontok egy körön vannak. Ez nyilvánvaló, ha B_1 vagy C_1 egybeesik D-vel. Az nem lehet, hogy B_1 a b egyenes jobb oldali részén, ugyanakkor C_1 a c egyenes bal oldali részén helyezkedik el, ekkor ugyanis az AB_1C_1 háromszög negatív körüljárású lenne. Így három esetet különböztethetünk meg. Az 2. ábrán látható első esetben mindkét pont a megfelelő egyenes bal oldali részén helyezkedik el. Ekkor az A és D pontok a B_1C_1 egyenesnek ugyanazon oldalára esnek, és a B_1C_1 szakasz mindkettőből α szög alatt látszik, vagyis az állítás következik a kerületi szögek tételének megfordításából. Ehhez teljesen hasonlóan igazolható az állítás abban az esetben is, ha mindkét pont a megfelelő irányított egyenes jobb oldalán van (*3. ábra*). Végül, ha B_1 a b bal oldali, C_1 pedig c jobb oldali részén van, akkor a B_1C_1 egyenes elválasztja az A és D pontokat. Ekkor azonban a B_1C_1 szakasz D-ből $(\pi - \alpha)$ szög alatt látszik, vagyis az AB_1DC_1 négyszög húrnégyszög (*4. ábra*).



2. ábra



3. ábra



4. ábra