

I. megoldás. Helyezzük el a háromszöget derékszögű koordináta-rendszerben: legyen $A(6; 2)$, $B(3; 6)$, $C(0; 0)$, ekkor valóban

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \approx 6,32, & \overline{AB} &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \\ \overline{BC} &= \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5} \approx 6,71.\end{aligned}$$

Mivel $\overline{BC} > \overline{AC} > \overline{AB}$, az $\overline{AB}$ -vel szemközt van a legkisebb szög, ez legyen α ; be kell látni, hogy $\alpha = 45^\circ$.

A C -ből az A pontba mutató helyvektor legyen $\mathbf{a}$, a B pontba mutató helyvektor legyen $\mathbf{b}$, ekkor ezek skaláris szorzata a definíció, illetve a koordináták segítségével kifejezve:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \cos \alpha, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 30.$$

Ebből $30 = 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \cos \alpha$, innen $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, azaz $\alpha = 45^\circ$.

Ezzel beláttuk, hogy a háromszög legkisebb szöge 45° -os.

II. megoldás. A háromszögben a legrövidebb oldal 5 egység hosszúságú. Tudjuk, hogy bármely háromszögben rövidebb oldallal szemben kisebb szög van. Ezért a háromszög legkisebb szöge az 5 egység hosszúságú oldallal szemben lesz.

A háromszögben a koszinusz tételt alkalmazva megkapjuk ezt a szöget, melyet jelöljön β :

$$\begin{aligned}5^2 &= (3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{10})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \cos \beta, \\ \cos \beta &= \frac{(3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{10})^2 - 5^2}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{9 \cdot 5 + 4 \cdot 10 - 25}{12\sqrt{50}} = \frac{60}{12\sqrt{25 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

A háromszög legkisebb szöge valóban 45° -os.

III. megoldás. Rajzoljuk meg az ABC háromszöget négyzethálóra. Az oldalak hossza: $AB = 3\sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{10}$, $AC = 5$.

Vegyük fel a DBC háromszöget úgy, hogy $CD = 5$ legyen, ekkor $BD = BA$, mert mindkettő egy 3×5 -ös téglalap átlója. Vagyis $ABC \cong DBC$. A jelzett szögek egyenlőségéből következik, hogy AB merőleges a DB -re, $ABC = 45^\circ$. Ezért az ABC háromszög legkisebb szöge valóban 45° -os.

Megjegyzés. A négyzetháló ettől eltérő megoldásokat is sugallhat. Például az ábrán látható szaggatott vonal behú-zása is egy újabb ötletet ad a megoldáshoz: ily módon egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget kapunk.

