

1.1. kérdés. A kondenzátorlemezre felírva a Gauss-törvényt megkapjuk a térerősséget: $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$. A térerősséget a két kondenzátorlemezen lévő töltés együttesen hozza létre, így mindkét lemez hozzájárulása $\frac{1}{2}E$. Ennek alapján a lemezek közt ható erő:

$$F_e = \frac{1}{2}EQ = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

1.2. kérdés. A Hooke-törvény alapján a rugóerő: $F_m = -kx$. Az előző kérdésben levezettük a lemezek közt ható elektromos erőt: $F_e = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$. A rendszer egyensúlyában $F_m + F_e = 0$, amiből $x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Ak}$.

1.3. kérdés. A térerősség a kondenzátorlemezek között homogén, így a lemezek közötti V potenciálkülönbség egyszerűen számolható: $V = E(d - x)$. Behelyettesítve az előző részekben kapott eredményeket, kapjuk:

$$V = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} \left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd} \right).$$

1.4. kérdés. A C kapacitás a töltés és a potenciálkülönbség hányadosa: $C = \frac{Q}{V}$. Felhasználva az előző kérdésre kapott eredményt:

$$\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd} \right)^{-1}.$$

1.5. kérdés. A rugóban tárolt mechanikai energia $U_m = \frac{1}{2}kx^2$, a kondenzátorban tárolt elektromos energia pedig $U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$. Így a rendszerben tárolt teljes energia

$$U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} \left(1 - \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 Akd} \right).$$

2.1. kérdés. Adott x érték esetén az egyes kondenzátorok töltése egyszerűen számolható:

$$Q_1 = VC_1 = \frac{\varepsilon_0 AV}{d - x}, \quad Q_2 = VC_2 = \frac{\varepsilon_0 AV}{d + x}.$$

2.2. kérdés. Ne felejtjük el, hogy két kondenzátorunk van. Felhasználva az 1.1. kérdésre kapott választ, az egyes kondenzátorokban fellépő erő

$$F_1 = \frac{Q_1^2}{2\varepsilon_0 A}, \quad F_2 = \frac{Q_2^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

Mivel a két erő ellentétes irányú, az eredő erő

$$F_e = F_1 - F_2 = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \left(\frac{1}{(d - x)^2} - \frac{1}{(d + x)^2} \right).$$

2.3. kérdés. Elhanyagolva az x^2 -rendű tagokat, kapjuk:

$$F_e = \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x.$$

2.4. kérdés. Két, k rugóállandójú rugó van sorba kapcsolva, így az eredő mechanikai erő $F_m = -2kx$. Az elektromos és a mechanikai erő ellentétes irányú, így, felhasználva az előző kérdésre kapott eredményt, az eredő erő

$$F = F_m + F_e = -2 \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x, \quad \text{ebből pedig} \quad k_{\text{eff}} = 2 \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right).$$

2.5. kérdés. Felhasználva Newton II. törvényét és az előző eredményt

$$a = -\frac{2}{m} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x.$$

3.1. kérdés. Írjuk fel az áramkörre a Kirchhoff-törvényeket!

$$\frac{Q_K}{C_K} + V - \frac{Q_2}{C_2} = 0, \quad -\frac{Q_K}{C_K} + V - \frac{Q_1}{C_1} = 0, \quad Q_2 - Q_1 + Q_K = 0.$$

Felhasználva, hogy $V_K = \frac{Q_K}{C_K}$, kapjuk:

$$V_K = V \frac{\frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 - x^2}}{C_K + \frac{2\varepsilon_0 A d}{d^2 - x^2}}.$$

3.2. kérdés. Elhanyagolva az x^2 -rendű tagokat, kapjuk:

$$V_K = V \frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 C_K + 2\varepsilon_0 A d}.$$

4.1. kérdés. Az elektromos és a mechanikai erő hányadosa

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{k_{\text{eff}} d^3}.$$

Behelyettesítve a numerikus értékeket

$$\frac{F_e}{F_m} = 7,6 \times 10^{-9}.$$

Az elektromos erők valóban elhanyagolhatók a rugóerők mellett.

4.2. kérdés. Az előzőek szerint elegendő a rugóerőt figyelembe vennünk: $F = 2kx$. Így a gyorsuló (lassuló) rendszerben a mozgó lemez egyensúlyi elmozdulása $x = \frac{ma}{2k}$. A maximális elmozdulás ennek éppen kétszerese, hiszen a mozgó lemez túllendül az egyensúlyi helyzetén:

$$x_{\text{max}} = 2x, \quad x_{\text{max}} = \frac{ma}{k}.$$

4.3. kérdés. Ha a gyorsulás $a = g$, a maximális elmozdulás

$$x_{\text{max}} = \frac{mg}{k}.$$

Továbbá felhasználva a 3.2. kérdésre kapott eredményt:

$$V_K = V \frac{2\varepsilon_0 A x_{\text{max}}}{d^2 C_K + 2\varepsilon_0 A d}.$$

Kifejezve C_K -t, és felhasználva, hogy $V_K = 0,15$ V,

$$C_K = \frac{2\varepsilon_0 A}{d} \left(\frac{V x_{\text{max}}}{V_K d} - 1 \right), \quad C_K = 8,0 \times 10^{-11} \text{ F}.$$

4.4. kérdés. Legyen ℓ a vezető feje és a kormány közötti távolság. Ennek becsült értéke $\ell = 0,4$ m–1 m.

Abban a pillanatban, amikor a lassulás elkezdődik, a vezető fejének az autóhoz viszonyított relatív sebessége nulla. $\Delta v(t=0) = 0$, így

$$\ell = \frac{1}{2} g t_1^2, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}, \quad t_1 = 0,3 \text{ s} - 0,5 \text{ s}.$$

4.5. kérdés. A t_2 idő a harmonikus rezgést végző lemez periódusidejének fele: $t_2 = \frac{T}{2}$, a periódusidő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

így $t_2 = 0,019$ s.

Mivel $t_1 > t_2$, a légzsák időben aktiválódik.

Megjegyzés a feladathoz: A gyakorlatban valóban ilyen elven működő gyorsulásmérők aktiválják az autók légzsákját. A valóságos és a feladatban szereplő eszközök között a legfontosabb különbség a méretekben van! A kereskedelemben kapható gyorsulásérzékelők integrált áramkörti technológiával készülnek, a miniatürizált mechanikai alkatrészek és az elektronika ugyanazon az egy-két mm² felületű félvezető csipen kerülnek kialakításra. Az apró és olcsó (néhány dolláros) eszközöket egyre több helyen használják rezgések mérésére és szabályozására; segítségükkel például csökkenthető a mosógépek centrifugálás közben fellépő rezonanciája.