

Megoldás. Írjuk fel a Kirchhoff-törvényeket a feladatban szereplő áramkörre! Ha az áramerősségeket az *ábrán* látható „hurokáramok” segítségével adjuk meg, akkor a csomóponti törvények automatikusan teljesülnek, a huroktörvények pedig az alábbi egyenleteket adják:

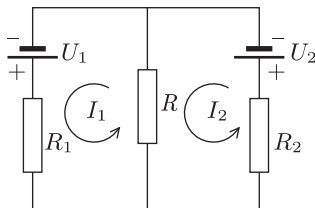
$$(1) \quad I_1 R_1 + (I_1 - I_2)R - U_1 = 0,$$

$$(2) \quad (I_2 - I_1)R + I_2 R_2 + U_2 = 0.$$

Ezt a lineáris egyenletrendszert megoldva

$$I_1 = \frac{U_1 R - U_2 R + U_1 R_2}{R_1 R_1 + R_1 R + R_2 R} \quad \text{és} \quad I_2 = \frac{U_1 R - U_2 R - U_2 R_1}{R_1 R_1 + R_1 R + R_2 R}$$

adódik.



Az R ellenállású fogyasztón összesen

$$I = I_1 - I_2 = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 R_1 + R_1 R + R_2 R}$$

áram folyik keresztül, a fogyasztóra jutó teljesítmény tehát

$$P = I^2 R = \frac{(U_1 R_2 + U_2 R_1)^2}{(R_1 + R_2)^2 R + 2R_1 R_2 (R_1 + R_2) + \frac{R_1^2 R_2^2}{R}}.$$

Ez a kifejezés (R függvényében) akkor maximális, ha a nevező minimális, az pedig (mivel a középső tagja nem függ R -től)

$$f(R) = (R_1 + R_2)^2 R + \frac{R_1^2 R_2^2}{R}$$

legkisebb értékénél teljesül.

Alkalmazzuk f -re a számtani és a mértani közép-re vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{2}f = \frac{(R_1 + R_2)^2 R + \frac{R_1^2 R_2^2}{R}}{2} \geq \sqrt{(R_1 + R_2)^2 R \cdot \frac{R_1^2 R_2^2}{R}} = (R_1 + R_2)R_1 R_2.$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $(R_1 + R_2)^2 R = \frac{R_1^2 R_2^2}{R}$, vagyis ha a fogyasztó ellenállása

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

ami az áramforrások belső ellenállásainak soros eredője.