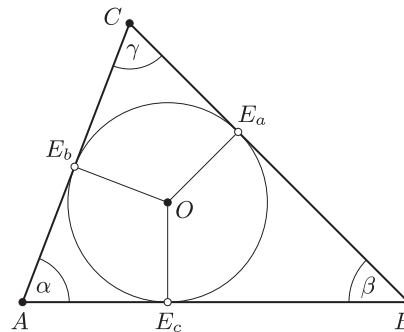


Megoldás. Ismeretes, hogy egy O_1 középpontú α szögű és egy O_2 középpontú β szögű elforgatás szorzata (egymás után végrehajtásának eredménye) $\alpha + \beta$ szögű elforgatás, ha $\alpha + \beta \neq 360^\circ$. Így az α , β és γ szöggel való elforgatások szorzatának egy $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ -os elforgatás felel meg, azaz egy középpontos tükrözés.

Tekintsük az ABC háromszög beírt körét és az oldalakon lévő érintési pontokat. Az 1. ábrán látható E_b pont az A körül α szöggel, negatív irányban elforgatva E_c -be megy át. Az E_c pont a B pont körül β szöggel, negatív irányban elforgatva E_a -ba, hasonlóan az E_a pont C körül γ szöggel, negatív irányban elforgatva E_b -be kerül.

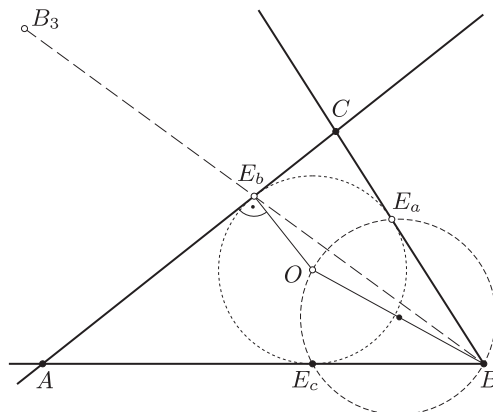


1. ábra

Tehát a három forgatás szorzatának E_b fixpontja, vagyis E_b lesz a tükrözés középpontja.

Ez azt jelenti, hogy az adott BB_3 szakasz felezőpontja E_b .

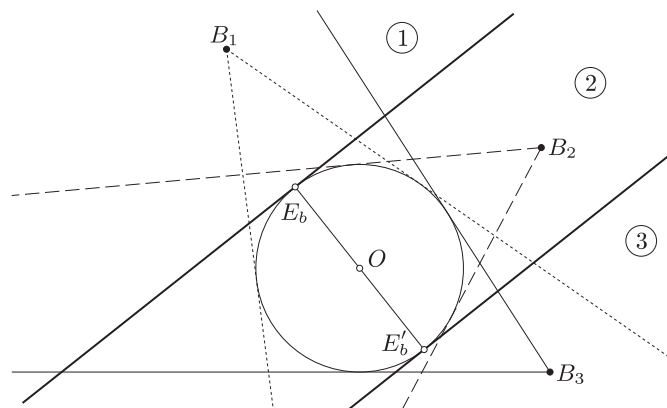
Ekkor az E_bO -ra E_b -ben állított merőleges lesz a b oldal egyenese, a B pontból az O középpontú, E_bO sugarú körhöz húzott érintők pedig az a és c oldalak egyenesét adják. Ezzel megkaptuk a háromszög mindhárom oldalegyenesét, azaz megszerkesztettük a háromszöget (2. ábra). A megoldás, amennyiben létezik, egyértelmű.



2. ábra

Ha az adott BB_3 szakasz felezőpontja egybeesik O -val, akkor nincs megoldás.

Húzzuk meg az E_bO szakaszra E_b -ben állított merőleget, és az E_b -nek az O -ra való tükörképében állított merőleget. Ez a két párhuzamos egyenes a síkot három részre bontja (3. ábra).



3. ábra

Ha B az 1. síkrészben van, akkor a körhöz húzott érintők előbb metszik a b egyenest, mint érintenék a kört, ami azt jelenti, hogy a kör az így kapott háromszögnek nem beírt, hanem hozzáírt köre. Tehát ekkor sincs megoldás.

Ha B az 1. és 2. síkrész határán van, akkor egyik érintő egybeesik b -vel, tehát nincs megoldás.

Ha B a 2. síkrészbe esik, akkor az egyik érintő félegyenes nem fogja metszeni b -t, azaz szintén nincs megoldás.

Ha B a 2. és 3. síkrész határán van, akkor egyik érintő párhuzamos lesz b -vel, ebben az esetben sincs megoldás.

Ha B a 3. síkrészbe esik, akkor a B -ből a körhöz húzott érintők az érintési pontjaik után metszik a b egyenest, azaz ekkor a kör valóban az ABC háromszög beírt köre lesz. Tehát pontosan akkor van megoldása a feladatnak, ha B a 3. síkrész (belső) pontja.