

I. megoldás. A binomiális tétel szerint:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sqrt{2}^i \sqrt{3}^{n-i}.$$

Vegyük észre, hogy ha n páratlan, akkor az előbbi összeg mindegyik tagja $a_i \cdot \sqrt{2}$ (ha i páratlan), vagy $a_i \cdot \sqrt{3}$ (ha i páros) alakú, ahol minden $0 \leq i \leq n$ -re a_i egész szám. Fejtsük ki $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n$ -t $n = 1$ -re és $n = 3$ -ra, abban bízva, hogy a kapott egyenletekből ki tudjuk fejezni $\sqrt{2}$ -t $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^1$ és $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3$ racionális együtthatós kombinációjaként:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^1 = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}.$$

A két egyenlet összevetéséből

$$\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 - 9 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2}$$

adódik, következésképpen a

$$p(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x$$

racionális együtthatós polinom megoldása a feladatnak, hiszen a fentiek szerint $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2}$.

II. megoldás. Mivel $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$ előáll $q(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ alakban, ahol q racionális együtthatós polinom, nevezetesen: $q(x) = \frac{x^2 - 5}{2}$. Ha $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, akkor

$$x \cdot \frac{x^2 - 5}{2} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} + \sqrt{18} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}.$$

Az $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ egyenlőség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\sqrt{2} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = x \cdot \frac{x^2 - 5}{2} - 2x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x.$$

Tehát a

$$p(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x$$

polinom megfelel a feltételeknek.

Megjegyzés. Vizsgáljuk meg, melyek azok a racionális együtthatós p polinomok, amelyekre $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2}$. Némi számolással igazolható, hogy az $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ számok a racionális számtest felett lineárisan függetlenek, azaz, ha r_1, r_2, r_3, r_4 racionális számokra

$$r_1 \cdot 1 + r_2 \cdot \sqrt{2} + r_3 \cdot \sqrt{3} + r_4 \cdot \sqrt{6} = 0,$$

akkor szükségképpen $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$. Ha $p(x)$ legfeljebb harmadfokú, akkor $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ahol a, b, c, d racionális számok. Pontosán akkor teljesül, hogy

$$\begin{aligned} p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{2} &= a(11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}) + b(5 + 2\sqrt{6}) + c(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + d - \sqrt{2} = \\ &= (5b + d) \cdot 1 + (11a + c - 1)\sqrt{2} + (9a + c)\sqrt{3} + 2b\sqrt{6} = 0, \end{aligned}$$

ha $5b + d = 11a + c - 1 = 9a + c = 2b = 0$. Ennek az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van: $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = -\frac{9}{2}$, $d = 0$. Azt kaptuk tehát, hogy a legfeljebb harmadfokú polinomok közül pontosan egy teljesíti a feladat feltételeit: $\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gyöke az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinomnak. Legyen most p tetszőleges racionális együtthatós polinom. Osszuk el maradékosan $(x^4 - 10x^2 + 1)$ -gyel:

$$p(x) = (x^4 - 10x^2 + 1)s(x) + r(x),$$

ahol r és s racionális együtthatós polinomok, r legfeljebb harmadfokú. Az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinom választása miatt $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = r(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Tehát p pontosan akkor felel meg a feltételnek, ha r is megfelel. Mivel r legfeljebb harmadfokú, ez azzal ekvivalens, hogy $r(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x$. Az eddigieket összefoglalva, p pontosan akkor elégíti ki a feltételeket, ha

$$p(x) = (x^4 - 10x^2 + 1)s(x) + \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x,$$

ahol s tetszőleges racionális együtthatós polinom.