

I. megoldás. Ábrázoljuk az adott pontokat a derékszögű koordináta-rendszerben. Az OA egyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szöge legyen α , az OB egyenesnek az x tengellyel bezárt szöge β és a $\angle COA = \gamma$. A γ szöget a COA háromszögből számíthatjuk ki a koszinusz-tétel felhasználásával:

$$\overline{CA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OA}\overline{OC}\cos\gamma.$$

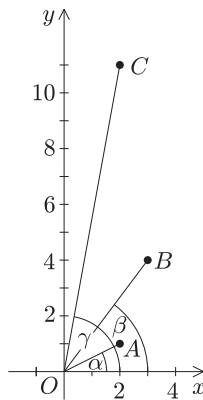
$$\overline{CA} = 10, \overline{OA} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \overline{OC} = \sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{125}, \text{ vagyis}$$

$$100 = 5 + 125 - 2\sqrt{5}\sqrt{125}\cos\gamma, \quad \text{ahonnan}$$

$$\cos\gamma = \frac{3}{5} \quad (\text{és } \gamma \approx 53,13^\circ).$$

Innen

$$1 + \tan^2\gamma = \frac{1}{\cos^2\gamma} = \frac{25}{9}, \quad \tan\gamma = \frac{4}{3}.$$



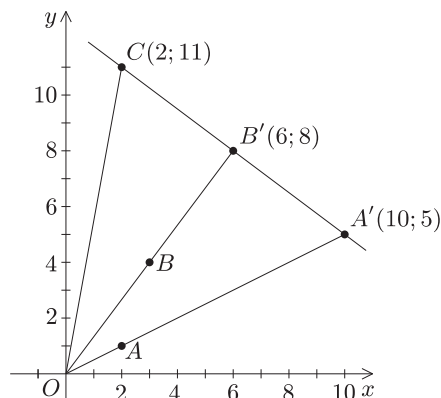
$\angle BOA = \beta - \alpha$, és $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $\tan\beta = \frac{4}{3}$. Az ismert $\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$ összefüggés alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

(innen $\angle BOA = \arctan\frac{1}{2} \approx 26,57^\circ$) és

$$\tan(2(\beta - \alpha)) = \frac{2\tan(\beta - \alpha)}{1 - \tan^2(\beta - \alpha)} = \frac{4}{3} = \tan\gamma, \quad \text{tehát } \gamma = 2(\beta - \alpha).$$

II. megoldás. Tekintsük a $2B = B'(6; 8)$ és az $5A = A'(10; 5)$ koordinátájú pontokat. Nyilván B' az OB , A' az OA félegyenesen vannak. Azt állítjuk, hogy az A' , B' , C pontok egy egyenesen sorakoznak. Állításunk következik abból, ha megmutatjuk, hogy B' az $A'C$ szakasz felezőpontja. Valóban $\frac{2+10}{2} = 6$, és $\frac{11+5}{2} = 8$.



Számítsuk ki az OC és OA' szakaszok hosszát: $\overline{OC} = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125}$, $\overline{OA'} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125}$. Az $OA'C$ háromszög tehát egyenlő szárú, OB' e háromszög O csúcsát az alap felezőpontjával összekötő szakasz. Az egyenlő szárú háromszög alaptulajdonságaiból következik, hogy OB' felezi a $\angle COA'$ szöget, s ezt akartuk bizonyítani.