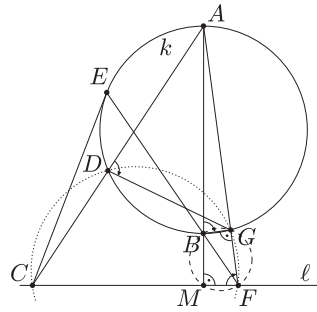


Először kimondjuk az irányított szögek néhány alapvető tulajdonságát, köztük néhány, az iskolából is jól ismert tételt, amelyet alkalmazni fogunk.

- (5) Rögzített $\varphi \neq 0$ mellett azon P pontok mértani helye a síkon, melyekre $\angle APB = \varphi$, egy A -n és B -n átmenő kör. Speciálisan A, B, C, D pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy körre, ha $\angle ACB = \angle ADB$.

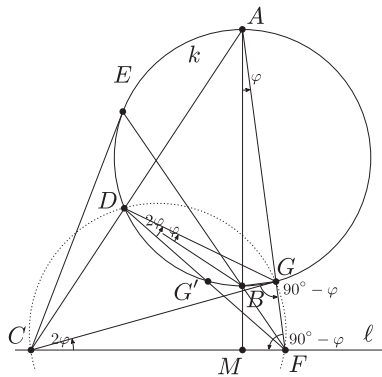
Tehát (5) szerint C, F, G, D egy körre illeszkednek.



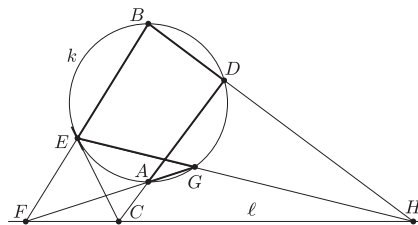
Jelöljük DF és k második metszéspontját G' -vel, és legyen $GAB \sphericalangle = GDB \sphericalangle = \varphi$ (4. ábra). A $CFGD$ húrnégy-szögből, az AMF derékszögű háromszögből és a CFG egyenlő szárú háromszögből:

$$GDG' \sphericalangle = GDF \sphericalangle = GCF \sphericalangle = -2CFG \sphericalangle = -2(90^\circ - FAM \sphericalangle) = 2\varphi = 2GAB \sphericalangle.$$

A DB egyenes tehát felezi a GDG' szöveget, vagyis a B pont felezi a GG' ívet.

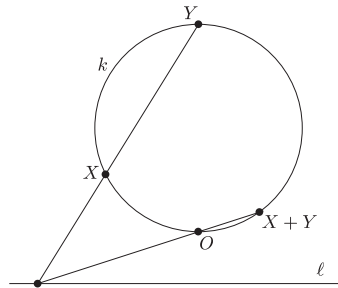


II. megoldás. Jelöljük H -val a BD és EG egyenesek metszéspontját, és alkalmazzuk a Pascal-tételt az $EEBDAG$ elfajult húrhatszögre (5. ábra). A szemközti oldalak metszéspontja C , F , illetve H (az EE oldal a körhöz E -ben húzott érintő); a Pascal-tétel szerint ez a három pont egy egyenesen van. Tehát a H pont is illeszkedik az ℓ egyenesre.



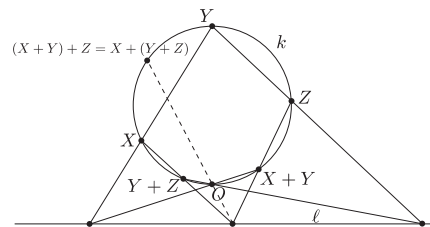
Legyen G' a k kör és DF másik metszéspontja, és alkalmazzuk most a Pascal-tételt a $GG'DBBE$ elfajult hatszögre (6. ábra). Az F és a H pont két-két szemközti oldal metszéspontja, ezért a harmadik oldalpár, vagyis a GG' egyenes és a k -hoz B -ben húzott érintő metszéspontja is az $FH = \ell$ egyenesen van. Mivel az érintő párhuzamos ℓ -l, ez csak akkor lehetséges, ha GG' is párhuzamos velük, tehát G és G' az AB átmérőre szimmetrikus.

III. megoldás. Defináljunk a k kör pontjain egy kétváltozós műveletet, amelyet az összeadáshoz hasonlóan a $+$ jellel fogunk jelölni, a következőképpen. Válasszunk ki egy tetszőleges, ℓ -re nem illeszkedő O pontot a körön. A kör bármely X, Y pontpárjára szerkesszük meg ℓ és az XY egyenes metszéspontját. (Ha $X = Y$, akkor az XY egyenes az érintő. Ha a két egyenes párhuzamos, akkor a metszéspont ℓ ideális pontja.) A metszéspontot kössük össze O -val, és szerkesszük meg az egyenes és a kör másik metszéspontját. (Ha az egyenes érinti a kört, akkor a másik metszéspont is O .) Ez a pont legyen $X + Y$ (7. ábra).



7. ábra

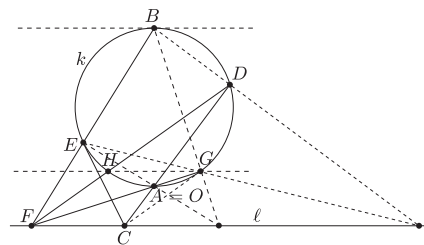
A $+$ művelet a definíció alapján biztosan kommutatív, $X + Y = Y + X$. Az is igaz, hogy asszociatív, azaz $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ tetszőleges X, Y, Z pontok esetén. Ez a tulajdonság ekvivalens a Pascal-tétellel (8. ábra)



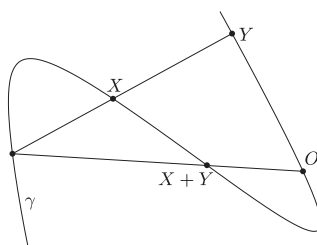
8. ábra

Ezen kívül könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges X pontra $X + O = X$, és létezik olyan Y pont, amelyre $X + Y = O$. (Ezt a pontot mostantól jelölhetjük $-X$ -szel is.) Összefoglalva, a kör pontjai ezzel a $+$ művelettel egy kommutatív csoportot alkotnak, amelynek neutrális eleme az O pont.

Térjünk most rá a feladat állításának bizonyítására. Legyen $O = A$, és jelöljük H -val a DF egyenes és k második metszéspontját. Azt akarjuk megmutatni, hogy GH párhuzamos az ℓ egyenessel, ami azt jelenti, hogy $G + H = O$ (9. ábra).



9. ábra



10. ábra

Az ábráról jól leolvasható, hogy $B + B = O$, $E + E = D$ és $B + E = D + H = G$. Ezekből

$$G + H = (B + E) + (B + E - D) = (B + B) + (E + E - D) = O + O = O.$$

Megjegyzések. 1. A felhasznált $+$ műveletet az algebrai geometriából, a harmadfokú görbék elméletéből vettük át. Ha γ egy harmadfokú síkgörbe (amelyet tehát egy kétváltozós harmadfokú egyenlet ír le), és O a γ egy tetszőleges pontja, akkor a görbe pontjain a feladatban leírt módon értelmezhetünk egyfajta összeadást (10. ábra). Ezzel a művelettel a görbe pontjai mindig kommutatív csoportot alkotnak.

A megoldásban azt az elfajuló esetet alkalmaztuk, amikor γ a k kör és az ℓ egyenes uniója. A $+$ művelet ebben az esetben is értelmezhető a teljes görbén, bár két ℓ -en fekvő pont összegét máshogy kell definiálni. A megoldáshoz csak k pontjaira volt szükségünk, amelyek a teljes csoportnak egy részcsoporthat alkotják.

2. A pontok közötti összefüggésekből több más geometriai tény is könnyen levezethető. Például könnyen ellenőrizhető, hogy $G + G = E + E$, $B + G = E$ és $B + D = G + E$. Ezek geometriai állításokra lefordítva azt mondják, hogy CG is érinti a kört, továbbá a BG és AE , illetve BD és GE egyenesek metszéspontja is ℓ -re esik. (Ezeket a pontokat is feltüntettük a 9. ábrán.)

A dolgozatok tanulságai

A legtöbb versenyző az I. megoldáshoz hasonló elemi úton a szögek összeszámolásával és a kerületi szögek tételének többszöri alkalmazásával – de előjeles szögek használata nélkül – oldotta meg a feladatot. Ezen a dolgozatoknak nagy részében a diszkusszió részben vagy teljesen hiányzott. A teljes megoldáshoz az ábrának és a pontok elhelyezkedésének legalább 4-féle változatát kellett volna megkülönböztetni, ezt egyedül *Bogár Péter* tette meg. Azok, akiknél a diszkusszió teljesen hiányzott, és a megoldást csak az ábra egyféle elrendezésére számolták végig, 3 pontot kaptak.