

**I. megoldás.** A törtek a kezdeti feltétel második része miatt mindig értelmezve vannak. Hozzunk közös nevezőre mindkét oldalon:

$$a^7 \cdot \frac{(1+a)^2 - (1-a)^2}{(1-a)^2(1+a)^2} = b^7 \cdot \frac{(1+b)^2 - (1-b)^2}{(1-b)^2(1+b)^2}.$$

A számlálókban a műveletek elvégzése után igen egyszerű kifejezések adódnak (a nevezőkben is végezzük el a szorzást):

$$a^7 \cdot \frac{4a}{(1-a^2)^2} = b^7 \cdot \frac{4b}{(1-b^2)^2}.$$

Osszunk 4-gyel és szorozzunk a nevezőkkel:

$$a^8 \cdot (1-b^2)^2 = b^8 \cdot (1-a^2)^2.$$

Mindkét oldalon teljes négyzetek szerepelnek:

$$(a^4 b^2 - a^4)^2 = (b^4 a^2 - b^4)^2.$$

A feltételként szereplő azonosságot alkalmazva a zárójeleken belül:

$$[a^2(a^2 + b^2) - a^4]^2 = [b^2(b^2 + a^2) - b^4]^2.$$

A zárójeleken belül a műveleteket elvégezve kapjuk, hogy:  $(a^2 b^2)^2 = (b^2 a^2)^2$ , ami nyilvánvalóan igaz, és mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredeti állítás is igaz.

**II. megoldás.** A feladat feltétele szerint  $a^2 + b^2 = a^2 b^2$ . Ebből  $b^2$ -et kifejezve:

$$(1) \quad b^2 = \frac{a^2}{a^2 - 1}.$$

$(a^2 - 1)$ -gyel azért oszthatunk, mert  $|a| \neq 1$ . Ugyanígy

$$(2) \quad a^2 = \frac{b^2}{b^2 - 1}.$$

Alakítsuk át a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalát:

$$\begin{aligned} \frac{a^7}{(1-a)^2} - \frac{a^7}{(1+a)^2} &= \frac{b^7}{(1-b)^2} - \frac{b^7}{(1+b)^2}, \\ \frac{a^9 + 2a^8 + a^7 - a^9 + 2a^8 - a^7}{((1-a)(1+a))^2} &= \frac{b^9 + 2b^8 + b^7 - b^9 + 2b^8 - b^7}{((1-b)(1+b))^2}, \\ \frac{4a^8}{(a^2 - 1)^2} &= \frac{4b^8}{(b^2 - 1)^2}, \\ a^4 \cdot \left( \frac{a^2}{a^2 - 1} \right)^2 &= b^4 \cdot \left( \frac{b^2}{b^2 - 1} \right)^2. \end{aligned}$$

Helyettesítsük be a zárójelben szereplő kifejezések helyére az (1)-ben és (2)-ben kapott értékeket:

$$\begin{aligned} a^4 \cdot (b^2)^2 &= b^4 \cdot (a^2)^2, \\ a^4 b^4 &= a^4 b^4, \end{aligned}$$

ami azonosság. Ezzel az állítást igazoltuk.

*Megjegyzések.* 1. Kicsit módosul a megoldás vége, ha  $a^2 - 1$ , illetve  $b^2 - 1$  helyére írjuk be a feltételből kapott  $\frac{a^2}{b^2}$ , illetve  $\frac{b^2}{a^2}$  kifejezéseket.

2. Sokan bármiféle megjegyzés nélkül gyököt vontak és  $\frac{a^4}{a^2 - 1} = \frac{b^4}{b^2 - 1}$ -gyel dolgoztak, és kihozták például, hogy  $a^2 b^2 = a^2 + b^2$  – ami a feltétel. Ebből ugyan következik a kiinduló állítás, de nem ekvivalens azzal (mint ahogy többen írták). (Ahogy pl.  $a^2 = b^2$ -ből sem következik  $a = b$ , de  $a = b$ -ből következik  $a^2 = b^2$ .)