

Megoldás. Jelöljük 2005-öt a -val, 2006-ot b -vel. Ekkor az egyenletek:

$$(1) \quad y = -x + a,$$

$$(2) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$(3) \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1.$$

Számítsuk ki az egyenesek metszéspontjainak koordinátáit.

Az (1) és (2) egyenletből:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{-x+a}{b} &= 1, & \text{innen} \\ bx - ax + a^2 &= ab, \\ x(b-a) &= ab - a^2, \\ x &= \frac{a(b-a)}{b-a} = a \quad \text{és} \quad y = 0. \end{aligned}$$

A $P_1(a; 0)$ a két egyenes metszéspontja.

Az (1) és (3) egyenesek metszéspontja legyen P_2 . Az egyenletek szimmetriájából következik, hogy $P_2(0; a)$.

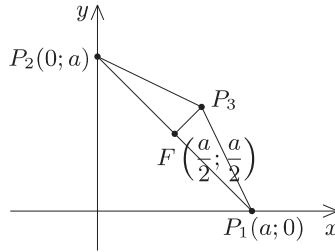
A (2) és (3) egyenesek P_3 metszéspontjának koordinátáit megkapjuk, ha az egyenletrendszert megoldjuk. A (2) egyenletből: $x = \frac{ab-ay}{b}$. Helyettesítsük ezt (3)-ba:

$$\begin{aligned} \frac{ab-ay}{b^2} + \frac{y}{a} &= 1, \\ a^2b - a^2y + yb^2 &= ab^2, \quad \text{és innen} \quad y = \frac{ab}{a+b}. \end{aligned}$$

Az egyenletek szimmetriája miatt P_3 x koordinátája ugyanennyi, azaz

$$P_3 \left(\frac{ab}{a+b}; \frac{ab}{a+b} \right).$$

A $P_1P_2P_3$ háromszög területét kell meghatározni.



Könnyű belátni, hogy a $P_1P_2P_3$ háromszög egyenlő szárú. Alapja $\overline{P_1P_2}$, az ehhez tartozó magassága P_3 -ból indul és felezi a P_1P_2 szakaszt. P_1P_2 felezőpontja F , koordinátái $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

$$\overline{P_1P_2} = a\sqrt{2}, \quad \overline{P_3F} = \sqrt{2 \left(\frac{ab}{a+b} - \frac{a}{2} \right)^2} = \left(\frac{ab}{a+b} - \frac{a}{2} \right) \sqrt{2}.$$

A terület:

$$T = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a(b-a)}{2(a+b)} \cdot \sqrt{2} = \frac{a^2(b-a)}{2(a+b)}.$$

Írjuk be a és b számértékeit, kapjuk, hogy

$$T = \frac{2005^2}{2(2005+2006)} \approx 501,13 \text{ területegység.}$$