

I. megoldás. A szükséges dobások száma pontosan akkor n , ha az első $n-1$ dobás fej, az n -edik pedig írás – ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, vagy ha az első $(n-1)$ dobás írás, az n -edik pedig fej – ennek a valószínűsége ugyancsak $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; így

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

valószínűséggel dobunk n -szer ($n \geq 2$). A szükséges dobások számának a várható értéke definíció szerint a dobások számának a valószínűsükkel súlyozott átlaga, azaz

$$M = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Az M értékét adó végtelen sort a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ végtelen mértani sor összegének felhasználásával határozzuk meg:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{3}{2} + \frac{M}{2}, \end{aligned}$$

tehát $M = 3$ a dobások számának várható értéke.

Megjegyzés. Az M (és hasonló típusú összegek) egy másik kiszámítási módja a következő:

$$\begin{aligned} M &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + 5 \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4}\right) + \dots \end{aligned}$$

Az egyes zárójelekben álló összegeket írjuk egy-egy sorba, majd az így kapott (fentről lefelé végtelen) táblázat elemeit ne soronként, hanem oszloponként összegezzük; az oszlopösszegek mindegyike egy $\frac{1}{2}$ hányadosú végtelen mértani sor, ezzel pedig

$$\begin{aligned} M &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right] + \left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots\right] + \\ &+ \left[\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots\right] + \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

II. megoldás. Az első dobás után – bármi is annak az értéke – az ellenkező kimenetelre várunk. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{2}$, ezért átlagosan két dobás után következik be. Tehát átlagosan $1 + 2 = 3$ dobás szükséges ahhoz, hogy legyen fej is és írás is.