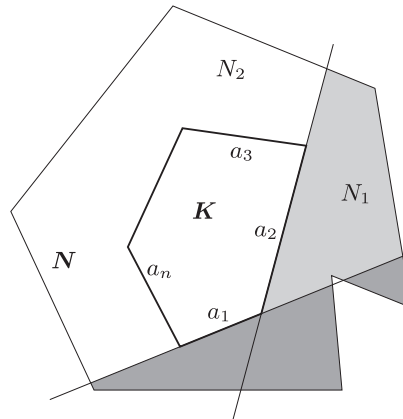
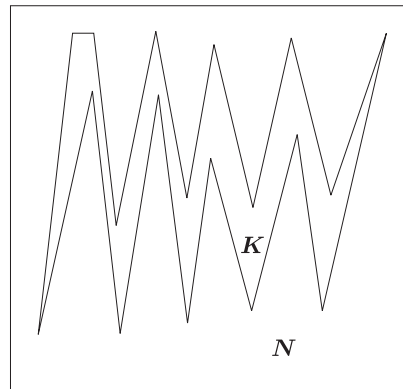


**Megoldás.** Először megmutatjuk, hogy ha az  $N$  sokszög a belsejében tartalmazza a  $K$  konvex sokszöget, akkor  $N$  kerülete nagyobb, mint  $K$  kerülete. Legyenek  $K$  oldalai  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Mivel  $K$  konvex, az oldalegyenesei által meghatározott két-két zárt félsík egyike tartalmazza. Mivel  $K$  az  $N$  belsejében van, az  $a_1$  oldal egyenesére  $N$ -ből egy olyan  $N_1$  sokszöget vág le, amelynek a kerülete kisebb, mint  $N$  kerülete, és  $N_1$  tartalmazza  $K$ -t (1. ábra). Ezután az  $a_2$  oldal egyenesével vághatunk le  $N_1$ -ből egy olyan  $N_2$  sokszöget, amely szintén tartalmazza  $K$ -t, kerülete pedig kisebb, mint  $N_1$  kerülete. Ezt az eljárást az  $a_3, \dots, a_n$  oldalakkal folytatva kapjuk az  $N_3, \dots, N_n = K$  sokszögeket, melyeknél  $N_i$  kerülete kisebb, mint  $N_{i-1}$  kerülete ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Így  $N$  kerülete nagyobb, mint  $N_n = K$  kerülete. (Gondolatmenetünkben lényeges volt, hogy  $K$  konvex, egy konkáv sokszög kerülete lehet nagyobb, mint az őt tartalmazó sokszög kerülete, lásd a 2. ábrát.)



1. ábra



2. ábra

Esetünkben tehát  $K$  kerülete kisebb, mint az 1 méter oldalú négyzet kerülete, azaz 400 cm. Legyenek  $K$  oldalai valamilyen körüljárás szerinti sorrendben  $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ . Tekintsük a csúcsok által meghatározott háromszögek közül azokat, melyeknek két oldala  $K$  két szomszédos oldala. Ilyen háromszögből 100 darab van, a szomszédos oldalak szerint rendezve őket két-két oldaluk rendre  $(b_1; b_2), (b_2; b_3), \dots, (b_{100}; b_1)$ . Ezeknek az oldalpároknak az összhossza éppen  $K$  kerületének kétszerese, azaz kisebb, mint 800 cm. Ez viszont azt jelenti, hogy a 100 oldalpár közt van legalább egy, melyben a két oldal hosszának összege kisebb, mint 8 cm. Legyen  $(b_i, b_{i+1})$  egy ilyen oldalpár. Az általuk meghatározott háromszög területe legfeljebb  $\frac{b_i b_{i+1}}{2}$ , hiszen ezt a mennyiséget még a két oldal által bezárt szög szinuszával is meg kell szorozni, hogy a területet megkapjuk. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján:

$$\left(\frac{8}{2}\right)^2 > \left(\frac{b_i + b_{i+1}}{2}\right)^2 \geq b_i b_{i+1},$$

vagyis a háromszög területe kisebb, mint  $\frac{4^2}{2} = 8 \text{ cm}^2$ , ami éppen a bizonyítandó állítás.

**Megjegyzés.** A feladat állításában szereplő  $8 \text{ cm}^2$ -es becslésnél jóval erősebb felső korlát is adható a legkisebb háromszög területére. Az **A. 380.** feladat megoldásából (lásd KöMaL 2006/1., 27. oldal) következik, hogy ez a terület legfeljebb  $0,51 \text{ cm}^2$ .