

I. megoldás. A feltétel szerint S pozitív, azért S^2 és S minimuma egyszerre létezik, S minimuma S^2 minimumának a négyzetgyöke és a két minimumot a változók ugyanazon értékeire kapjuk. Számoljuk tehát ki S négyzetét:

$$S^2 = \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2 \underbrace{\left(\frac{ab}{c} \cdot \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a} + \frac{bc}{a} \cdot \frac{ac}{b} \right)}_{a^2+b^2+c^2=1}.$$

Rendezzük át a kapott egyenlőséget és csoportosítsuk a jobb oldalon a tagokat:

$$S^2 - 2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{a^2c^2}{b^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{a^2c^2}{b^2} \right).$$

A jobb oldal a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint nagyobb vagy egyenlő, mint

$$\sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} \cdot \frac{a^2c^2}{b^2}} + \sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2c^2}{b^2}} = a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Azt kaptuk, hogy $S^2 \geq 3$; a bevezetőben mondtak szerint tehát S -nek a megadott feltételek esetén létezik legkisebb értéke és az $\sqrt{3}$. Az is látható, hogy az egyenlőség feltétele az, hogy mindhárom számtani-mértani egyenlőtlenségben az egyenlőség teljesüljön, amire pontosan akkor kerül sor, ha $\frac{ab}{c} = \frac{ac}{b} = \frac{bc}{a}$, azaz $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Megjegyzések. 1. Az olvasó felismerheti a 2005. októberi számunkban ismertetett *Muirhead-tétel* módszerét. A feladat lényegében az

$$\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

egyenlőtlenség igazolása volt. Ennek szimmetrikus változata a Muirhead-tétel szerint igaz, hiszen $(2; 2; -2) \succ (2; 0; 0)$. A feladat állítása ennél élesebb, itt már a *ciklikus* permutációk között is fennáll az egyenlőtlenség. Ez azon múlik, hogy a $B(2; 0; 0)$ pont benne van az $A_1(2; 2; -2)$, $A_2(2; -2; 2)$, $A_3(-2; 2; 2)$ pontok konvex burkában: az A_1A_2 szakasz felezőpontja.

2. Másképpen is bebizonyíthatjuk a fenti megoldásban kulcsszerepet játszó

$$Q = \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

egyenlőtlenséget. A bal oldal kétszeresében a tagokat alkalmasan csoportosítva

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} \right) + \left(\frac{c^2a^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{c^2} \right) + \left(\frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \right) = \\ & = b^2 \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) + a^2 \left(\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \right) + c^2 \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \right). \end{aligned}$$

A jobb oldalon a zárójelekben rendre egy-egy pozitív számnak és a reciprokanak az összege áll, amelyről ismeretes, hogy legalább 2. Így $2Q \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$ és ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás. Azt fogjuk igazolni, hogy $S \geq \sqrt{3}$. A pozitív nevezőkkel való szorzás után elegendő azt bebizonyítani, hogy $\sqrt{3}abc \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

Vezessük be az $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$ változókat. Ezekkel az eredeti változók négyzete rendre

$$a^2 = \frac{zx}{y}, \quad b^2 = \frac{xy}{z}, \quad c^2 = \frac{yz}{x}.$$

A feltétel a nevezőkkel való szorzás után az új változókra nézve azt jelenti, hogy $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz$, a bizonyítandó állítás pedig azt, hogy

$$\sqrt{3xyz} \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Négyzetre emelve

$$3xyz \leq x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Az új változókra kapott feltételből helyettesítsük be xyz négyzetösszeg alakját:

$$3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3z^2x^2 \leq x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Rendezve és 2-vel szorozva

$$\begin{aligned} 0 & \leq x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 + z^4 + x^4 - 2z^2x^2 = \\ & = (x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2. \end{aligned}$$

A végső egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $S \geq \sqrt{3}$. Egyenlőség lehetséges, pontosan akkor, ha $x^2 = y^2 = z^2$, azaz ha $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{3}$, vagyis a kifejezés legkisebb lehetséges értéke $\sqrt{3}$.