

I. megoldás. Azt állítjuk, hogy $\underbrace{(6\dots6)}_{n \text{ jegy}}^2 + \underbrace{8\dots8}_{n \text{ jegy}} = \underbrace{4\dots4}_{2n \text{ jegy}}$ minden pozitív egész n -re igaz. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk be.

Tudjuk, hogy $n = 1$ -re igaz. Tételezzük fel, hogy n jegy esetén fennáll az egyenlőség, vagyis $\underbrace{(6\dots6)}_{n \text{ jegy}}^2 + \underbrace{8\dots8}_{n \text{ jegy}} = \underbrace{4\dots4}_{2n \text{ jegy}}$. Bizonyítandó, hogy

$$\left(\underbrace{6\dots6}_{n+1 \text{ jegy}}\right)^2 + \underbrace{8\dots8}_{n+1 \text{ jegy}} = \underbrace{4\dots4}_{2n+2 \text{ jegy}}.$$

A bizonyításhoz vezessük be a következő jelöléseket: $a = \underbrace{1\dots1}_n$, $b = \underbrace{1\dots1}_{2n}$. E jelöléseket felhasználva azt kell bizonyítani, hogy ha

$$(1) \quad (6a)^2 + 8a = 4b,$$

akkor

$$(6 \cdot (10a + 1))^2 + 8(10a + 1) = 4(100b + 11).$$

Kis átalakításokat végezve, majd b helyére az (1)-ből következő $9a^2 + 2a$ kifejezést írva:

$$\begin{aligned} 36 \cdot (10a + 1)^2 + 80a + 8 &= 400b + 44, \\ 9(100a^2 + 20a + 1) + 20a + 2 &= 100b + 11, \\ 900a^2 + 200a + 11 &= 900a^2 + 200a + 11. \end{aligned}$$

Azonossághoz jutottunk, az állítás teljesül $(n + 1)$ -re is; a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Az állítás két oldalát lépésenként alakítjuk át:

$$\begin{aligned} \underbrace{(6\dots6)}_{n \text{ db}}^2 + \underbrace{8\dots8}_{n \text{ db}} &= \underbrace{4\dots4}_{2n \text{ db}}, \\ \underbrace{(1\dots1)}_{n \text{ db}}^2 \cdot 36 + \underbrace{1\dots1}_{n \text{ db}} \cdot 8 &= \underbrace{1\dots1}_{2n \text{ db}} \cdot 4, \\ \underbrace{1\dots1}_{n \text{ db}} \cdot 4 \cdot (\underbrace{1\dots1}_{n \text{ db}} \cdot 9 + 2) &= \underbrace{1\dots1}_{2n \text{ db}} \cdot 4, \\ \underbrace{1\dots1}_{n \text{ db}} \cdot (\underbrace{9\dots9}_{n \text{ db}} + 2) &= \underbrace{1\dots1}_{2n \text{ db}}, \\ \underbrace{1\dots1}_{n \text{ db}} \cdot (10^n - 1 + 2) &= \underbrace{1\dots1}_{2n \text{ db}}, \\ \underbrace{1\dots1}_{n \text{ db}} \cdot (10^n + 1) &= \underbrace{1\dots1}_{2n \text{ db}}, \\ \underbrace{1\dots1}_{n \text{ db}} \cdot 10^n + \underbrace{1\dots1}_{n \text{ db}} &= \underbrace{1\dots1}_{2n \text{ db}}, \\ \underbrace{1\dots1}_{2n \text{ db}} &= \underbrace{1\dots1}_{2n \text{ db}}, \end{aligned}$$

ami azonosság, tehát az állítás minden n -re igaz.

III. megoldás. Mivel $\underbrace{k\dots k}_n = k \cdot \frac{10^n - 1}{9}$, az eredeti egyenlőség így írható:

$$\left(\frac{6 \cdot (10^n - 1)}{9}\right)^2 + 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = 4 \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9}.$$

Mindkét oldalt $\frac{4}{9}$ -del osztva:

$$\begin{aligned} (10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1) + (2 \cdot 10^n - 2) &= 10^{2n} - 1, \\ 10^{2n} - 1 &= 10^{2n} - 1. \end{aligned}$$

Az állítás tehát minden n -re igaz.