

I. megoldás. Jelöljük a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló összeget S_n -nel.

Azt állítjuk, hogy S_n nem változik, ha minden tagjának a számlálójában ciklikusan eggyel megnöveljük az indexet:

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} &= \\ = \frac{a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_3^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_1^2}{a_n + a_1}. \end{aligned}$$

A két oldal különbségét képezve és az egyenlő nevezőjű törtet összevonva minden egyes tagban egyszerűsíthetünk:

$$\frac{a_i^2 - a_{i+1}^2}{a_i + a_{i+1}} = a_i - a_{i+1}.$$

A két oldal különbsége így teleszkópikus összegként $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_1) = 0$, a fenti azonosságot igazoltuk. A bizonyítandó egyenlőtlenséget ezek után írjuk a

$$2S_n \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

alakba és a jobb oldalon is „kettőzzük meg” a tagokat:

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n + a_1} \geq \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \dots + \frac{a_n + a_1}{2}.$$

Vegyük észre végül, hogy ebben az egyenlőtlenségben a bal oldal tagonként nagyobb a jobb oldalánál. Ha x és y pozitív számok, akkor a négyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2} \right)^2,$$

amiből valóban

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \frac{x + y}{2}$$

következik. Ezzel a feladatot megoldottuk. A bizonyításból kiderül, hogy az egyenlőség feltétele az, hogy valamennyi négyzetes-számtani közép egyenlőtlenségben egyenlőség álljon, ami pedig pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$.

II. megoldás. Ha x, y pozitív számok, akkor

$$S(x; y) = \frac{x^2}{x + y} = \frac{x^2 + xy}{x + y} - \frac{xy}{x + y} = x - \frac{xy}{x + y}.$$

A jobb oldalon a különbség második tagja a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség négyzetéből felülről becsülhető:

$$\frac{xy}{x + y} \leq \frac{x + y}{4}, \quad \text{ahonnan} \quad S(x; y) \geq x - \frac{x + y}{4} = \frac{3x - y}{4}.$$

Ha most az $x = a_i$, $y = a_{i+1}$ helyettesítések után összegezzük az így adódó n darab egyenlőtlenséget, akkor a bal oldalon éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala áll. A jobb oldalon a $3a_i$ alakú számok összegének és az a_i alakú számok összegének a különbségét kell 4-gyel osztani: ez éppen az adott számok összegének a fele, a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldala.