

I. megoldás. Nem igaz. Mutatunk példát olyan négyszögre, hogy a területének négyzete egyenlő oldalainak szorzatával, de nincs derékszöge.

Tekintsük azt a húrtrapézt, amelynek alapjai 2 és 8, szárjai 5 egység hosszúak. (Mivel $5 + 2 + 5 > 8$, ilyen trapéz valóban létezik.)

Könnyen kiszámítható, hogy a szárnak a hosszabbik alapra eső merőleges vetülete $\frac{8-2}{2} = 3$ egység hosszú. Az itt keletkező derékszögű háromszög másik befogója a trapéz magassága, melynek hossza így 4 egység. A trapéz területe tehát $T = \frac{8+2}{2} \cdot 4 = 20$ területegység, $T^2 = 400$. Az oldalak szorzata $2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5 = 400$. A két mennyiség valóban megegyezik, a különböző alapok miatt pedig nyilván nincsenek derékszögek a szimmetrikus trapéznak.

Megjegyzés. A feladat megoldásához a fenti ellenpélda nyilván elegendő. Ugyanakkor tárgyalható a probléma némiképpen általánosabban is. Az alábbi megoldás a húrnégyszögek közül keresi meg az összes alkalmassat.

II. megoldás. Jelölje a négyszög oldalait a, b, c, d , félkerületét s . Tegyük fel, hogy a négyszög húrnégyszög, ekkor területére teljesül, hogy

$$T^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Mivel $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, a terület négyzete:

$$T^2 = -\frac{1}{16} \cdot (a-b-c-d)(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d).$$

A feltétel szerint ez az oldalak szorzatával, $abcd$ -vel egyenlő. Ezt az egyenlőséget átrendezve, majd szorzattá alakítva:

$$\begin{aligned} 0 &= -16abcd - (a-b-c-d)(a-b+c+d)(a+b+c-d)(a+b-c+d) = \\ &= -16abcd - ((a-b)^2 - (c+d)^2)((a+b)^2 - (c-d)^2) = \\ &= -16abcd - ((a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - \\ &\quad -2(ab+cd))((a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 2(ab+cd)) = \\ &= -16abcd - ((a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab+cd)^2) = \\ &= 4(ab-cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = \\ &= (2ab - 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab - 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) = \\ &= ((a+b)^2 - (c+d)^2)((c-d)^2 - (a-b)^2) = \\ &= -(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d). \end{aligned}$$

A négy szorzótényező közül legalább az egyik 0. Vizsgáljuk az eseteket külön-külön.

I. eset: $a+b-c-d=0$, azaz $a+b=c+d$. Szavakban: két-két szomszédos oldal összege egyenlő. Ugyanezt a feltételt kapjuk a negyedik szorzótényező nulla voltának vizsgálatakor. Ilyen feltétel mellett nem kell, hogy derékszöge legyen a húrnégyszögnek. Erre egy példát is mutathatunk: az oldalak legyenek rendre 9, 5, 7, 7 egység hosszúak. Könnyen látható, hogy a fenti feltételek teljesülnek erre a négy oldalra, és tudjuk úgy mozgatni az oldalakat, hogy húrnégyszög legyen a négyszögünkből. Többféleképpen is belátható, hogy ennek a négyszögnek nem lesznek derékszögei. (Ennek megmondolását az Olvasóra bízunk.)

II. eset: $a-b+c-d=0$, azaz $a+c=b+d$, négyszögünk nemcsak húrnégyszög, hanem érintőnégyyszög is. Olyan húrtrapéz például, melynek szára $b = \frac{a+c}{2}$, ha a és c az alapok.

III. eset: $a+c+b+d=0$. Ez nyilván nem teljesülhet.

Találtunk tehát a húrnégyszögek között többféle ellenpéldát is, így a feladat kérdésére válaszunk nemleges.