

1⁰. Bármelyik P kerületi pontján függesztjük fel a háromszöget, a súlyvonal a háromszög S súlypontján megy keresztül; ez a PS egyenes a háromszöget két részre osztja, az egyik a $CPR\Delta$, a másik az $APRB$ négyszög. Minthogy a háromszög homogén anyagból való, a két rész tömege a területükkel arányos. Az $ABC\Delta$ területe legyen t , a $CPR\Delta$ -é t_1 ; a négyszög területe $t - t_1$. Keresnünk kell eszerint az

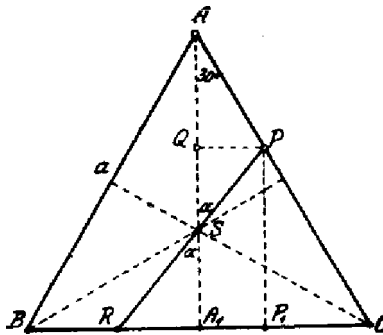
$$(1) \quad y = \frac{t - t_1}{t_1} = \frac{t}{t_1} - 1 \dots$$

kifejezés értékét, mint $AP = x$ függvényét, ha $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$. (Ugyanis P távolságát a hozzá közelebb eső csúctól számítjuk!) Már most

$$(2) \quad t_1 = \frac{1}{2} RC \cdot PP_1 = \frac{1}{2} (RA_1 + A_1C) \cdot PP_1 = \frac{1}{2} \left(RA_1 + \frac{a}{2} \right) PP_1 \dots$$

A PP_1C derékszögű háromszögből

$$PP_1 = PC \sin 60^\circ = (a - x) \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Legyen a változó $\angle ASP = \angle RSA_1 = \alpha$.

Ekkor $RA_1 = SA_1 \tan \alpha = \frac{a}{6} \sqrt{3} \tan \alpha$, mert

$$SA_1 = \frac{1}{3} AA_1 = \frac{1}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{6} \sqrt{3}.$$

A $PQS\Delta$ -ből

$$\tan \alpha = \frac{PQ}{QS}.$$

$$\text{Azonban } PQ = AP \cdot \sin 30^\circ = \frac{x}{2} \text{ és } QS = AS - AQ = \frac{2}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2} - x \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Így

$$QS = \frac{\sqrt{3}}{6} (2a - 3x), \quad \tan \alpha = \frac{x\sqrt{3}}{2a - 3x}.$$

és

$$RA_1 = \frac{a}{6} \sqrt{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2a - 3x} = \frac{ax}{2(2a - 3x)}.$$

továbbá 2) alapján

$$(3) \quad t_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{ax}{2(2a - 3x)} + \frac{a}{2} \right] (a - x) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{(a - x)^2}{2a - 3x} \dots$$

Minthogy

$$(4) \quad t = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}, \quad \text{azért} \quad y = \frac{a(2a - 3x)}{(a - x)^2} - 1 \dots$$

2⁰. A PR által szétválasztott két rész területe egyenlő, ha $y = 1$, azaz ha

$$\frac{a(2a - 3x)}{(a - x)^2} - 1 = 1.$$

Innen, rendezés után keletkezik

$$(5) \quad x(2x - a) = 0 \dots$$

azaz $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a}{2}$. A két rész területe akkor és csak akkor egyenlő, ha a P pont a háromszög egyik csúcsa, vagy egyik oldalának felező pontja. Mind a két eset azt jelenti, hogy a PR súlyvonal a háromszög valamely súlyvonala, mely a háromszöget két egybevágó háromszögre bontja.

3. Az y függvény értéke eszerint az x szóbanforgó intervallumának két határpontján egyenlő, t. i. $x = 0$ és $x = \frac{a}{2}$ helyen $y = 1$. Minthogy y az x -nek folytonos függvénye, kell, hogy a $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ intervallumban szélső értéke legyen.

Vizsgáljuk y differenciálhányadosát!

$$y' = \frac{-3a(a-x)^2 + 2(a-x)(2a^2 - 3ax)}{(a-x)^4} = \frac{-3a(a-x) + 4a^2 - 6ax}{(a-x)^3}$$
$$y' = \frac{a(a-3x)}{(a-x)^3}.$$

Szélső érték csak ott lehet, ahol $y' = 0$, tehát ha $x = \frac{a}{3}$.

Ha $x < \frac{a}{3}$, akkor $y' > 0$; ha $x > \frac{a}{3}$, akkor $y' < 0$.

Ebből következik, hogy az y függvény értéke először $y = 1$ -től növekedik egy bizonyos maximumig, azután csökken $y = 1$ -ig. Még pedig

$$y_{\max} = \frac{a(2a-a)}{\left(\frac{2a}{3}\right)} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Látjuk ebből, hogy $t - t_1 > t_1$, azaz a négyszög területe mindig nagyobb a háromszögénél. (Egyenlőség akkor áll elő, ha a négyszög háromszöggé válik).