Megoldás. Szorozzuk a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát $n(n-1)$-gyel. Mivel $n>1$, ez az egyenlőtlenség ekvivalens átalakítása. Rendezés után kapjuk, hogy

$$0 \le -nx^{n-1} + nx^{n-1} \cdot x - x^n + 1,$$

$$0 \le nx^{n-1} \cdot (x-1) + (1-x)(1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1}),$$

$$0 \le (x-1)\left[nx^{n-1} - (1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1})\right].$$

Ha $x \ge 1$, akkor $x-1 \ge 0$, és $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1} \le x^{n-1}$, ezért

$$(1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1}) \le n \cdot x^{n-1},$$

így $nx^{n-1} - (1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1}) \ge 0$, azaz

$$0 \le (x-1)\big[nx^{n-1} - (1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1})\big]$$

igaz.

Ha $0 < x < 1$, akkor $x-1 < 0$, és $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1} \ge x^{n-1}$, ezért

$$1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1} \ge n \cdot x^{n-1},$$

így $nx^{n-1} - (1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1}) \le 0$, azaz

$$0 \le (x-1)\big[nx^{n-1} - (1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1})\big]$$

igaz.

Igazoltuk az egyenlőtlenséget, tehát bizonyítottuk a feladat állítását.