

I. megoldás. Tekintsünk egy ilyen zárt töröttvonalat. Oldalain egy irányban haladva irányítsuk az oldalvektorokat. A töröttvonal zárt, ezért

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

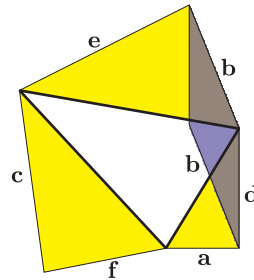
Rendezzük át az összeget úgy, hogy az egymásra merőleges vektorok szomszédosak legyenek, ezt megtehetjük a vektorok összeadásának kommutatív és asszociatív tulajdonsága miatt:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) + (\mathbf{b} + \mathbf{e}) + (\mathbf{c} + \mathbf{f}) = \mathbf{0}.$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy az $(\mathbf{a} + \mathbf{d})$, $(\mathbf{b} + \mathbf{e})$, $(\mathbf{c} + \mathbf{f})$ vektorok hosszaira teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Így a töröttvonal létezésének szükséges feltétele, hogy a $\sqrt{a^2 + d^2}$, $\sqrt{b^2 + e^2}$, $\sqrt{c^2 + f^2}$ szakaszok közül egyik sem lehet nagyobb a másik kettő összegénél. Nem nehéz belátni e feltétel elégségességét is, hiszen ebből a három szakaszból egy legfeljebb elfajult háromszög szerkeszthető. Ezen háromszög megfelelő oldalaira kifelé megszerkesztjük a megfelelő derékszögű háromszögeket, a $\sqrt{a^2 + d^2}$ hosszú oldalra az a és d befogójú derékszögű háromszöget, és hasonlóan a többi. Már csak az oldalak átrendezésére van szükség, úgy, hogy szomszédos a és d , b és e , valamint c és f átellenesek legyenek. Ehhez az alábbi szomszédos oldalcserékre lesz szükség, amelyeket az 1. ábrán látható módon, esetenként elfajuló paralelogrammákkal valósíthatunk meg (a félkövérrel jelölt oldalakat cseréljük):

$$\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{f}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{f}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}.$$

Nem zártuk ki azt a lehetőséget sem, hogy a töröttvonal szomszédos oldalai esetleg egy egyenesbe esnek.



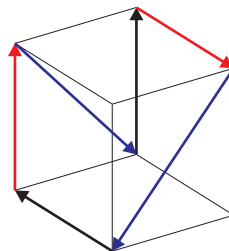
1. ábra

II. megoldás. Tegyük fel, hogy $ABCDEF$ ilyen zárt töröttvonal, ahol $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EF = e$, $FA = f$. Tükrözzük az A pontot a BF szakasz felezőpontjára, az így kapott A' pontra $A'B = FA = f$ és $FA' = AB = a$. Ezek az egymással egyenlő hosszúságú szakaszok egyben párhuzamosak is, tehát az $A'B$ szakasz merőleges a CD szakaszra, az FA' szakasz pedig a DE szakaszra.

Ugyanígy tükrözve a C pontot a BD oldal felezőpontjára, az E pontot pedig a DF oldal felezőpontjára, olyan $A'BC'DE'FA'$ zárt töröttvonalhoz jutunk, melynek oldalai $A'B = f$, $BC' = c$, $C'D = b$, $DE' = e$, $E'F = d$, $FA' = a$, és az $A'B$, $C'D$, $E'F$ szakaszok rendre merőlegesek a BC' , DE' , FA' szakaszokra. Az $A'C'E'$ pontok tehát olyan, esetleg elfajuló háromszöget határoznak meg, melynek oldalai $\sqrt{f^2 + c^2}$, $\sqrt{b^2 + e^2}$, $\sqrt{d^2 + a^2}$. Szükséges feltétel tehát, hogy ezen három szakasz közül egyik se legyen nagyobb a másik kettő összegénél.

Ez a feltétel egyben elégséges is. Ugyanis ha a $\sqrt{f^2 + c^2}$, $\sqrt{b^2 + e^2}$, $\sqrt{d^2 + a^2}$ szakaszokból megszerkesztjük az esetleg elfajuló $A'C'E'$ háromszöget, majd ennek oldalaira a megfelelő $A'BC'$, $C'DE'$, $E'FA'$ derékszögű háromszögeket, ahol $A'B = f$, $BC' = c$, $C'D = b$, $DE' = e$, $E'F = d$ és $FA' = a$ (erre az általános esetben 8 különféle lehetőségünk van), akkor az A' , C' , E' pontokat rendre az FB , BD , DF szakaszok felezőpontjára tükrözve a feltételeknek megfelelő $ABCDEF$ zárt töröttvonalat kapunk.

Bizonyításunk nem csak síkban adja meg a kívánt feltételt, példaként tekintsük a 2. ábrát.



2. ábra