

I. megoldás. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned}
 A(x; y) &= xy(x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + \underbrace{x + y}_1) = \\
 &= xy\left[\underbrace{(x + y)}_1(x^2 - xy + y^2) + x^2 + y^2 + 1\right] = \\
 &= xy(\underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_1 + x^2 - 3xy + y^2 + 1) = xy(x^2 - 3xy + y^2 + 2) = \\
 &= xy(\underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_1 - 5xy + 2) = xy(3 - 5xy).
 \end{aligned}$$

Az $a = xy$ jelölést bevezetve $A(x; y) = a(3 - 5a)$.

Ez az a -ban másodfokú kifejezés legnagyobb értékét az $a = \frac{3}{10}$ helyen veszi fel, a $\left]-\infty, \frac{3}{10}\right]$ intervallumban pedig szigorúan monoton növekedő. Az $x + y = 1$ feltétel miatt a lehetséges legnagyobb értéke $\frac{1}{4}$, amit $x = y = \frac{1}{2}$ esetén vesz fel. Mivel $\frac{1}{4} < \frac{3}{10}$, megállapíthatjuk, hogy az $A(x; y)$ kifejezés legnagyobb értéke

$$A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{5}{4}\right) = \frac{7}{16}.$$

II. megoldás. Helyettesítsünk A -ban y helyére $(1 - x)$ -et:

$$\begin{aligned}
 A(x; 1 - x) &= f(x) = x^4(1 - x) + x(1 - x)^4 + x^3(1 - x) + x(1 - x)^3 + \\
 &\quad + x^2(1 - x) + x(1 - x)^2, \quad \text{azaz} \\
 f(x) &= -5x^4 + 10x^3 - 8x^2 + 3x.
 \end{aligned}$$

Szélsőértéke ott lehet a kifejezésnek, ahol az első deriváltja 0:

$$f'(x) = -20x^3 + 30x^2 - 16x + 3 = 0,$$

amit így is írhatunk:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(-20x^2 + 20x - 6) = 0.$$

Az egyenletnek csak az $x = \frac{1}{2}$ a gyöke (a második tényezőnek nincs valós zérushelye). Maximuma pedig akkor lesz, ha ennél az értéknél a második deriváltja negatív:

$$f''(x) = -60x^2 + 60x - 16,$$

behelyettesítve $x = \frac{1}{2}$ -et:

$$(-60) \cdot \frac{1}{4} + 60 \cdot \frac{1}{2} - 16 = -1.$$

Tehát a kifejezésnek az $x = \frac{1}{2}$ -nél maximuma van. Az $x + y = 1$ alapján $y = \frac{1}{2}$.

Itt az eredeti kifejezés értéke: $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{16}$.