

I. megoldás. Azt állítjuk, hogy a bizonyítandó állítás ekvivalens a

$$(2) \quad \frac{p}{1-p} + \frac{1-q}{q} > 2$$

egyenlőtlenséggel. Valóban, (2)-t a feltétel szerint pozitív $(1-p)q$ -val szorozva

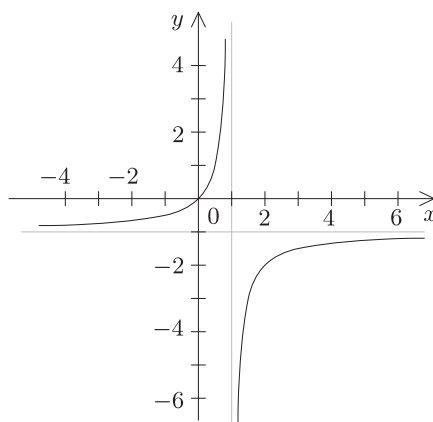
$$pq + (1-p)(1-q) > 2q(1-p)$$

adódik, innen pedig a zárójelek felbontása és alkalmas átrendezés után (1)-et kapjuk.

Vegyük észre, hogy az $f(x) = \frac{x}{1-x}$ függvény szigorúan monoton növekvő a $[0; 1)$ intervallumon (ábra). Ez azt jelenti, hogy $f(q) < f(p)$, így pedig (2) bal oldala alulról becsülhető:

$$\frac{p}{1-p} + \frac{1-q}{q} > \frac{q}{1-q} + \frac{1-q}{q}.$$

A kapott egyenlőtlenség jobb oldalán egy pozitív szám és reciprokának összege áll; ismeretes, hogy egy ilyen összeg legalább 2, amiből a bizonyítandó állítás következik.



II. megoldás. Azt igazoljuk, hogy a megadott feltételek esetén az (1) alábbi átrendezésével kapott

$$(3) \quad 3q - 4pq = q(3 - 4p) < 1 - p$$

egyenlőtlenség teljesül. Ha $3 - 4p \leq 0$, akkor a bal oldal nem pozitív, a jobb oldal pedig a feltétel szerint igen.

Ha $3 - 4p > 0$, akkor (3) mindkét oldalát ezzel elosztva elegendő igazolni, hogy ha $0 < q < p < \frac{3}{4}$, akkor

$$(4) \quad q < \frac{1-p}{3-4p}.$$

A befejezés az első megoldás alapötletét hasznosítja: gyorsan adódik, hogy ha $p < \frac{3}{4}$, akkor

$$(5) \quad p \leq \frac{1-p}{3-4p},$$

ahonnan a $q < p$ feltétel szerint megkapjuk (4)-et.

Az (5) egyenlőtlenséget egyszerűen igazolhatjuk: a jobb oldalon a nevező pozitív, beszorozva rendezés után teljes négyzetet kapunk:

$$4p^2 - 4p + 1 = (2p - 1)^2 \geq 0.$$

Megjegyzések. 1. Ha a II. megoldás szerint nem a q , hanem a p változót „fejezzük ki”, akkor a

$$3q - 1 < p(4q - 1)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek az igazolása azonban nehezebb abban az esetben, ha $4q - 1 < 0$.

2. A feladat nehezebbnek bizonyult a vártnál, elgondolkodtató a hibás dolgozatok magas száma. Ezekben többnyire egyenlőtlenségek során nem megengedett lépések „alkalmazása” volt a hiba.