

Ha a p_1 és p_2 erők α szöveget zárnak be, eredőjük: $(p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}$. A feladat követelménye:

$$(1) \quad (p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \alpha)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \dots$$

Innen

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{1}{8} \left[2 - 3 \left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \right) \right] \dots$$

Mint ahogy $\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \geq 2$, azért $\cos \alpha < 0$, tehát $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.¹

Továbbá

$$(3) \quad -1 \leq \cos \alpha \leq -\frac{1}{2} \dots$$

Ha ugyanis $\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1}$ helyébe legkisebb értékét 2-t tesszük, akkor $\cos \alpha$ legnagyobb értékét kapjuk. (3) alapján

$$180^\circ \geq \alpha \geq 120^\circ.$$

Már most abból, hogy $\cos \alpha \geq -1$, következik

$$\frac{1}{8} \left[2 - 3 \left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \right) \right] \geq -1, \text{ ill. } \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \leq \frac{10}{3}.$$

Legyen

$$\frac{p_1}{p_2} = x.$$

Az

$$x + \frac{1}{x} \leq \frac{10}{3}, \text{ ill. } x^2 - \frac{10}{3}x + 1 \leq 0$$

egyenlőtlenség megoldása: $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$, tehát

$$\frac{1}{3} \leq \frac{p_1}{p_2} \leq 3.^2$$

Vizsgáljuk a határeseteket.

$$\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} = 2, \text{ ha } p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 = 0, \text{ azaz } p_1 = p_2 = p.$$

Ezen esetben $\alpha = 120^\circ$ és az eredő: $(p^2 + p^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} = p$.

Valóban:

$$p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2).$$

Ha

$$\frac{p_1}{p_2} = 3, \text{ vagyis } p_1 = 3p_2, \text{ akkor}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{8} \left(2 - 3 \cdot \frac{10}{3} \right) = -1, \alpha = 180^\circ.$$

Az eredő $(p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2)^{\frac{1}{2}} = |p_1 - p_2| = 2p_2 = \frac{1}{2}(3p_2 + p_2)$.

Hajnal Miklós (izr. g. VIII. o. Bp.)

¹ Azt is mondhatjuk, hogy $90^\circ < \alpha < 270^\circ$. Azonban, ha $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, akkor lényegileg ugyanazon helyzetek állnak elő, mint amikor $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, csak ellenkező forgás után.

² Ugyanekkor $\frac{1}{3} \leq \frac{p_2}{p_1} \leq 3$.