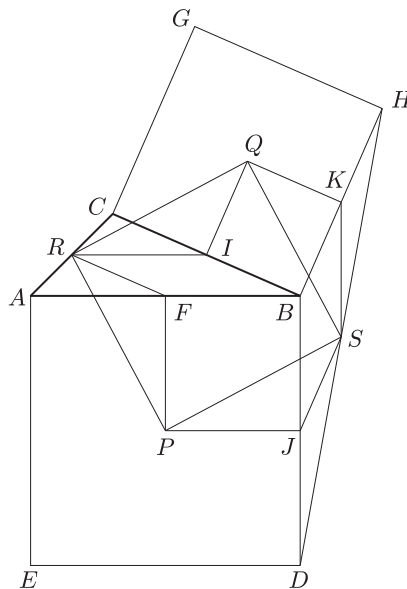


**I. megoldás.** Jelölje az  $AB$  szakasz felezőpontját  $F$ , a  $BC$ -ét  $I$ , a  $BD$ -ét  $J$ , a  $BH$ -ét pedig  $K$ . Mivel  $PJBF$  négyzet,  $PJ$  párhuzamos és egyenlő az  $ABC$  háromszög  $RI$  középvonalával; hasonlóan  $JS$  párhuzamos és egyenlő  $IQ$ -val. Ezért (azonos körüljárásuk miatt) a  $PJS$  háromszög az  $RIQ$  háromszög eltoltja, így  $PS$  párhuzamos és egyenlő az  $RQ$  szakasszal. Ugyanígy adódik, hogy  $SQ$  párhuzamos és egyenlő  $PR$ -rel. A feladat megoldásához már csak azt kell megmutatni, hogy például a  $PS$  és a  $PR$  szakaszok egyenlők és egymásra merőlegesek. Forgassuk el ehhez a  $PJS$  háromszöget  $P$  körül  $90^\circ$ -kal, így a  $J$  pont  $F$ -be kerül. Mivel  $JS$  a  $DBH$  háromszög  $BH$  oldalához tartozó középvonala,  $JS$  párhuzamos és egyenlő  $BK$ -val. Az  $RF$  szakasz viszont az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalához tartozó középvonala, ezért  $RF$  párhuzamos és egyenlő  $BI$ -vel. A  $BI$  és  $BK$  szakaszok a  $BKQI$  négyzet szomszédos oldalai lévén merőlegesek és egyenlő hosszúságúak, ezért ugyanez teljesül a  $JS$  és  $FR$  szakaszokra is. Tehát (azonos körüljárásuk miatt) a  $PJS$  háromszöget  $P$  körül  $90^\circ$ -kal elforgatva a  $PFR$  háromszöghöz jutunk, ezen belül  $PS$  a  $PR$ -be kerül. Ezzel állításunkat beláttuk.



**II. megoldás.** A feladat (és sok, ehhez hasonló kérdés) a komplex számok segítségével szinte gépiesen, bár némi számolással megoldható. Tekintsük ehhez a sík egy tetszőlegesen rögzített  $O$  pontját, és a belőle a sík különböző pontjaiba mutató vektorokat azonosítsuk a komplex számokkal. Jelöljük általában az  $\overrightarrow{OP}$  vektort, illetve a neki megfelelő komplex számot  $p$ -vel. A számolás alapja egyrészt a komplex számok körében az alpműveletekre vonatkozó műveleti azonosságok teljesülése, másrészt az, hogy az  $i$ -vel való szorzás az  $O$  körüli  $90^\circ$ -os forgatásnak felel meg. A korábbi jelölésekkel ekkor

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PS} &= s - p = \frac{1}{2}(h + d) - (f + \overrightarrow{FP}) = \frac{1}{2}((b + \overrightarrow{BH}) + (b + \overrightarrow{BD})) - (f + i \cdot \overrightarrow{FA}) = \\
 &= \frac{1}{2}((b + i(b - c)) + (b + i(a - b))) - \left(\frac{1}{2}(a + b) + i\frac{1}{2}(a - b)\right) = \\
 &= \frac{1}{2}(-a + b(i + 1) - ci), \\
 \overrightarrow{SQ} &= q - s = \left(\frac{1}{2}(b + c) + i\frac{1}{2}(b - c)\right) - \frac{1}{2}((b + i(b - c)) + (b + i(a - b))) = \\
 &= \frac{1}{2}(-ai + b(i - 1) + c), \\
 \overrightarrow{QR} &= r - q = \frac{1}{2}(a + c) - \left(\frac{1}{2}(b + c) + i\frac{1}{2}(b - c)\right) = \frac{1}{2}(a - b(i + 1) + ci).
 \end{aligned}$$

Látható, hogy

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PS} \cdot i &= \frac{1}{2}(-a + b(i + 1) - ci)i = \frac{1}{2}(-ai + b(-1 + i) + c) = \overrightarrow{SQ}, \\
 \overrightarrow{SQ} \cdot i &= \frac{1}{2}(-ai + b(i - 1) + c) \cdot i = (a + b(-1 - i) + ci) = \overrightarrow{QR}.
 \end{aligned}$$

Tehát  $PS$   $90^\circ$ -os elforgatottja  $SQ$ , az  $SQ$   $90^\circ$ -os elforgatottja  $QR$ , azaz  $PSQR$  valóban négyzet.