Megoldás. Mivel $5^x > 0$ és $2^{x-2} > 0$ minden x-re, alkalmazhatjuk rájuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{5^x + 2^{x-2}}{2} \geq \sqrt{5^x \cdot 2^{x-2}} = \frac{\sqrt{10^x}}{2}.$$

Szorozzuk 2-vel, majd vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát. Az lg függvény szigorúan monoton növekvő, ezért ez ekvivalens lesz az alábbival:

$$\lg\left(5^x + 2^{x-2}\right) \geq \lg 10^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}.$$

Szorozzuk 2-vel, majd adjuk hozzá az $\left(5^x - 2^{x-2}\right)^2 \geq 0$ egyenlőtlenséget. Így kapjuk, hogy

$$\left(5^x - 2^{x-2}\right)^2 + 2\lg(5^x + 2^{x-2}) \geq x.$$

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha az eredeti egyenlőtlenségekben is egyenlőség van, ami mindkét esetben akkor teljesül, ha $5^x = 2^{x-2}$, vagyis $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 4$.

Vegyük mindkét oldal $\frac{2}{5}$ alapú logaritmusát, ekkor kapjuk az egyenlet egyetlen megoldását: $x = \log_{\frac{2}{5}} 4$.

(Ha még kicsit alakítjuk, akkor az

$$x = \log_{\frac{2}{5}} 4 = \frac{\lg 4}{\lg \frac{2}{5}} \approx -1{,}5129$$

közelítő értéket kapjuk.)