I. megoldás. Jelöljük M-mel az A_2-ből a B_1B_3 egyenesre bocsátott merőleges és az A_3-ból a B_1B_2 egyenesre bocsátott merőleges metszéspontját (ez a metszéspont mindig létezik, mert a B_1B_3 és a B_1B_2 egyenesek nem párhuzamosak). Azt kell megmutatnunk, hogy az A_1M egyenes merőleges B_2B_3-ra. Ezt vektorok segítségével látjuk be.

Legyen $\overrightarrow{MA_i} = \mathbf{a}_i$ és $\overrightarrow{MB_i} = \mathbf{b}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Mivel MA_3 merőleges B_1B_2-re, azért $\mathbf{a}_3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = 0$, amit úgy is írhatunk, hogy

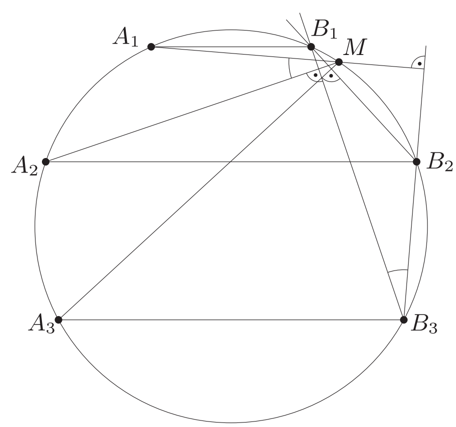
$$\big(\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1)\big)(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = 0, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3)(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2).$$

Ugyanígy kapjuk MA_2 és B_1B_3 merőlegességéből, hogy

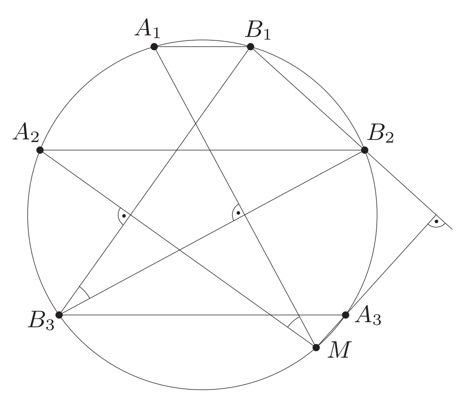
$$\mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3).$$

E két egyenlőséget kivonva egymásból:

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3)(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) - (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3).$$



1. ábra



2. ábra

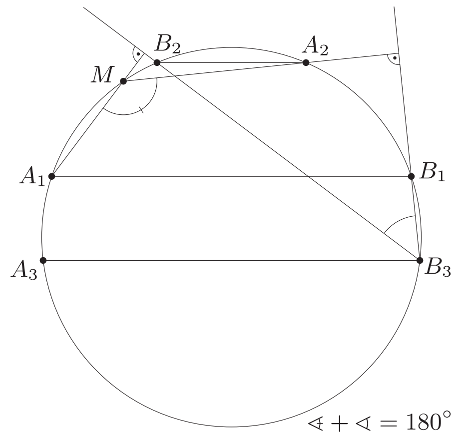
Az A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 egy kör három párhuzamos húrja, ezért a húrok közös felezőmerőlegesére tükrözve A_i képe B_i, vagyis az $\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j$ vektor tükörképe a $\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$ vektor. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3)(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3)(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2),$$

mert a vektorok hossza is, és szögük is megegyezik.

Tehát $\mathbf{a}_1(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) = 0$, vagyis az MA_1 szakasz merőleges a B_2B_3 egyenesre, ami éppen a bizonyítandó állítás.

II. megoldás. Legyen most M az A_1-ből a B_2B_3 egyenesre bocsátott merőleges és az A_2-ből a B_1B_3 egyenesre bocsátott merőleges metszéspontja. Ekkor az A_1MA_2 és a $B_1B_3B_2$ szögek merőleges szárúak, tehát vagy egyenlőek vagy pedig $180°$-ra egészítik ki egymást. Vagyis M az A_1A_2 pontpárnak ugyanolyan szögű látókörén helyezkedik el, mint B_3 a B_1B_2 pontpárnak (hiszen az α és a $180° - \alpha$ szögű látókörök, ha teljes köröket tekintünk, akkor megegyeznek). Viszont a B_1, B_2, B_3 pontokon átmenő körben A_1A_2 és B_1B_2 szimmetrikusan helyezkedik el, ezért a két látókör megegyezik, tehát M is az adott körön van. (Itt a lehetséges esetek szétválasztásával meg kell gondolnunk, hogy nem fordulhat elő az, hogy M az A_1A_2 pontpárhoz tartozó másik ugyanolyan szögű látóköríven van. Ezt az ábrák alapján elvégezhető diszkussziót az olvasóra bízzuk.)



3. ábra

Ekkor viszont azt is mondhatjuk, hogy M nem más mint az A_i-ből a B_jB_3 $\big(\{i;j\} = \{1;2\}\big)$ egyenesre bocsátott merőlegesnek a körrel vett második metszéspontja. Ugyanígy megmutathatjuk, hogy az A_3-ból B_1B_2-re bocsátott merőleges is áthalad az A_1-ből B_2B_3-ra bocsátott merőleges és a kör második metszéspontján, a három merőleges tehát mindig egy ponton megy át.