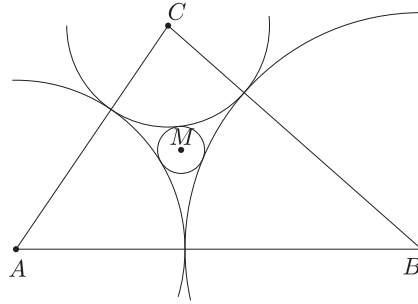


Megoldás. Először megmutatjuk, hogy létezik ilyen M pont, majd belátjuk, hogy csak egy ilyen pont van.

Nézzük az A középpontú $s - a$ sugarú, a B középpontú $s - b$ sugarú, valamint a C középpontú $s - c$ sugarú köröket. Ezek páronként érintik egymást, mert a középpontjaik távolsága megegyezik a sugaraik összegével. Pontosan egy olyan kör van, amely ezeket kívülről érinti, és egyiket sem tartalmazza (l. Apollóniusz-féle szerkesztések). Legyen ennek a körnek a középpontja M , sugara r . Ekkor $MA + BC = MB + AC = MC + AB = s + r$, azaz M megfelel a feltételnek.



Ezután belátjuk, hogy több ilyen pont nem létezhet.

Tegyük fel, hogy két ilyen pont van: M és N . Húzzuk meg az MA , MB , MC szakaszokat. Ekkor N valamelyik így keletkező háromszögtartományba vagy annak határára esik. Feltéhető, hogy ez a háromszög az ABM háromszög. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával nyerjük, hogy

$$MA + MB > NA + NB.$$

Emiatt $2(MA + BC) = MA + BC + MB + AC > NA + BC + NB + AC = 2(NA + BC)$.

Cseréljük fel M és N szerepét, azaz N -ből húzzuk meg a csúcsokba vezető szakaszokat. Ekkor M lesz valamelyik kisebb háromszögben, így a fentiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$2(NA + BC) > 2(MA + BC).$$

Ez ellentmondás, tehát valóban csak egy ilyen pont létezhet.