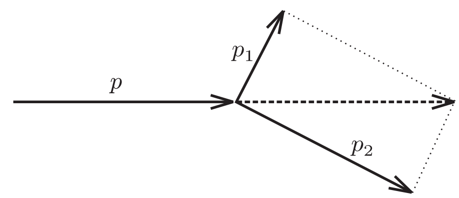
Megoldás. A pozitron és az elektron nyugalmi tömege m_0, a fénysebesség vákuumban $c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s. Jelöljük a pozitron impulzusát $\overrightarrow{p}$-vel, a keletkező fotonok impulzusát pedig $\overrightarrow{p_1}$-gyel és $\overrightarrow{p_2}$-vel!



Az impulzusmegmaradás tétele szerint $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$, az egymásra merőleges fotonimpulzusok nagyságára tehát Pitagorasz tétele szerint fennáll

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2. \tag{1}$$

A fotonok energiája $E_1 = p_1 c$, illetve $E_2 = p_2 c$, a v sebességgel haladó, tehát

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

impulzussal rendelkező pozitron teljes (nyugalmi + mozgási) energiája pedig

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{m_0^2\, c^4 + (p\, c)^2}. \tag{2}$$

A relativisztikus energiamegmaradás törvénye értelmében a pozitron energiájának és az álló elektron nyugalmi energiájának összege a keletkező fotonok összenergiájával egyezik meg:

$$E + m_0 c^2 = E_1 + E_2. \tag{3}$$

Fejezzük ki (1)-ben a fotonok impulzusát az energiájukkal, helyettesítsük be az így kiszámított p impulzust (2)-be:

$$E_1^2 + E_2^2 = E^2 - \left(m_0 c^2\right)^2, \tag{4}$$

majd fejezzük ki (3)-ból E_2-t és helyettesítsük (4)-be:

$$E_1^2 - E_1(E + m_0 c^2) + (E + m_0 c^2) m_0 c^2 = 0. \tag{5}$$

Ennek a másodfokú egyenletnek akkor van valós megoldása E_1-re, ha a diszkriminánsa nem negatív:

$$\left(E + m_0 c^2\right)^2 \geq 4(E + m_0 c^2) m_0 c^2,$$

azaz

$$E \geq 3 m_0 c^2. \tag{6}$$

Határesetben $E = 3m_0c^2$, ilyenkor $E_1 = E_2 = 2m_0c^2$. A fotonok impulzusa ekkor $p_1 = p_2 = 2m_0c^2$ nagyságú, és az ábrán látható téglalap négyzet. Ebben az esetben a fotonok a pozitron kezdeti impulzusához képest 45°-os szögben repülnek szét.

A pozitron sebességére vonatkozó korlátot (2)-ből és (6)-ból számíthatjuk ki:

$$v \geq \sqrt{\frac{8}{9}}\, c = 2{,}826 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$