Megoldás. Létezik ilyen függvény. Tetszőleges x racionális szám egyértelműen írható véges lánctört alakban:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

ahol a_0 egész szám, az $a_1, \ldots, a_n$ számok pedig pozitív egészek és $a_n > 1$. A lánctörtjegyeket egyszerű mohó algoritmussal kapjuk. Az a_0 csak az x egész része lehet. Ha x nem egész, akkor az $\frac{1}{x}$ számot kell tovább bontanunk. Az algoritmus során a felbontandó szám számlálója és nevezője az Euklideszi algoritmusnak megfelelően csökken, ezért az eljárás biztosan véget ér.

Legyen tetszőleges racionális x-re $\ell(x)$ az x lánctört alakjában a törtvonalak száma (azaz a fenti n index). A lánctörtképzés szabályai szerint $\ell(x) = 0$, ha x egész, és $\ell(x) = \ell\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ ha $0 < x < 1$.

Definiáljuk az f függvényt a következőképpen.

$$f(0) = -1; \qquad f(x) = (-1)^{\ell(x)}, \text{ ha } x > 0; \qquad f(x) = -(-1)^{\ell(|x|)}, \text{ ha } x < 0.$$

Az $\ell(x)$ függvény definíciójából következik, hogy ha x pozitív racionális szám és k pozitív egész, akkor $\ell(x+k) = \ell(x)$ és $f(x+k) = f(x)$.

Igazolni kell, hogy $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, ha $x \neq 0, \pm 1$. Mivel $f(-x) = -f(x)$ és $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$, ezt elég pozitív x-ekre belátni. Mivel x és $\frac{1}{x}$ szerepe is felcserélhető, feltehető, hogy $0 < x < 1$. Ekkor viszont $\ell(x) = \ell\left(\frac{1}{x}\right) + 1$, azaz $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

Az f függvény definíciójából látható, hogy ha $x + y = 0$, akkor $f(x) = -f(y)$, kivéve az $x = y = 0$ esetet. Ezért már csak azt kell belátni, hogy $f(1-x) = -f(x)$, ha $x \neq \frac{1}{2}$. A szimmetria miatt feltehető, hogy $x > \frac{1}{2}$.

Ha $x > 1$, akkor $f(x) = f(x-1) = -f(1-x)$, a feltétel teljesül.

Ha $x = 1$, akkor $f(x) = f(1) = 1$ és $f(1-x) = f(0) = -1$, szintén készen vagyunk.

Marad az az eset, amikor $\frac{1}{2} < x < 1$. Ekkor pedig

$$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right) = -f\left(\frac{1}{x} - 1\right) = -f\left(\frac{1-x}{x}\right) =$$

$$= f\left(\frac{x}{1-x}\right) = f\left(\frac{x}{1-x} + 1\right) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) = -f(1-x).$$

Az f függvény tehát mindegyik feltételnek eleget tesz.

Megjegyzés. Könnyű meggondolni, hogy ha $f(1)$ értéke adott, az a feltételek mellett az összes többi értéket meghatározza, (indukcióval a lánctört-alakban levő törtvonalak hossza szerint) ezért csak a most definiált f függvény és (-1)-szerese teljesíti a feltételeket.