

**Megoldás.** Legyen a gúla alaplapja az  $ABCD$  négyszög, ötödik csúcsa  $E$ , az  $E$ -ből az alaplapra állított merőleges talppontja pedig  $T$ . Mivel a gúla minden éle 1 egység hosszú, az  $ABCD$  négyszög rombusz. Az  $ET$  szakasz merőleges az  $ABCD$  síkra, ezért Pitagorasz tétele szerint

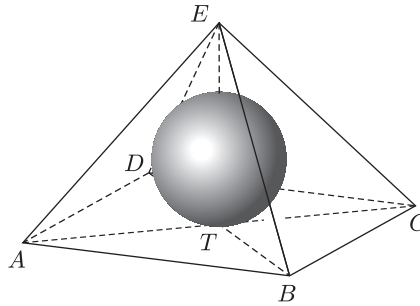
$$AT^2 = AE^2 - ET^2 = 1 - ET^2,$$

$$BT^2 = BE^2 - ET^2 = 1 - ET^2,$$

$$CT^2 = CE^2 - ET^2 = 1 - ET^2,$$

$$DT^2 = DE^2 - ET^2 = 1 - ET^2.$$

Vagyis  $AT = BT = CT = DT$ . Tehát az  $ABCD$  rombusz köré  $T$  középpontú kör írható, ezért a rombusz négyzet, amelynek  $T$  a középpontja.



Az  $ABCDE$  gúla tehát négyzet alapú egyenes gúla. Jelöljük a beírható gömbjének sugarát  $r$ -rel, felszínét  $F$ -fel, térfogatát pedig  $V$ -vel. Ismert, hogy  $V = F \cdot \frac{r}{3}$ . A keresett gömbsugarat tehát meghatározhatjuk, ha először kiszámítjuk a gúla felszínét és térfogatát.

Mivel  $ABCD$  egységnégyzet, azért  $AT = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , s így Pitagorasz tétele szerint

$$ET = \sqrt{AE^2 - AT^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ez a gúlának az egységnyi területű  $ABCD$  laphoz tartozó testmagassága, tehát a gúla térfogata

$$V = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

A gúla oldallapjai egységoldalú szabályos háromszögek, ezért felszíne

$$F = 1 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 + \sqrt{3}.$$

Tehát a gúlába írható gömb sugara

$$r = \frac{3V}{F} = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$