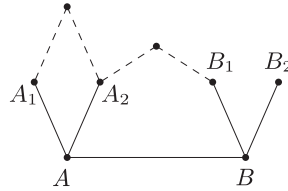


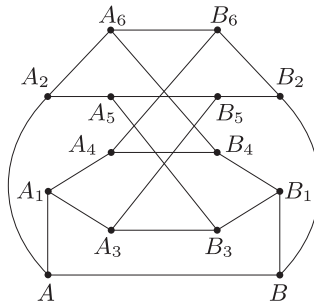
**Megoldás.** Megmutatjuk, hogy a gráfnak legalább 14 csúcsa van, és 14 csúcsú, a feltételeknek megfelelő gráf van is.

Legyen  $A$  és  $B$  a gráf két olyan csúcsa, melyeket él köt össze. Ekkor  $A$ -ból is és  $B$ -ből is még két-két él indul ki. Ezek végpontjai különbözőek, mert ha közülük valamelyik kettő egybeesne, akkor a gráfban lenne 3 hosszú kör. Jelöljük  $A$  másik két szomszédját  $A_1$ -gyel és  $A_2$ -vel,  $B$  másik két szomszédját pedig  $B_1$ -gyel és  $B_2$ -vel. Ekkor  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  és  $B_2$  további két-két szomszédja mind különböző csúcs kell hogy legyen, mert ha közülük valamelyik kettő egybeesne, akkor a gráfban lenne 4 vagy 5 hosszú kör, attól függően, hogy a közös szomszéd  $A_1$ -nek és  $A_2$ -nek vagy  $B_1$ -nek és  $B_2$ -nek, illetve az egyik  $A_i$ -nek, a másik  $B_j$ -nek szomszédja (1. ábra). Ez összesen további  $4 \cdot 2 = 8$  csúcs, tehát a gráfnak legalább  $2 + 4 + 8 = 14$  csúcsa van.



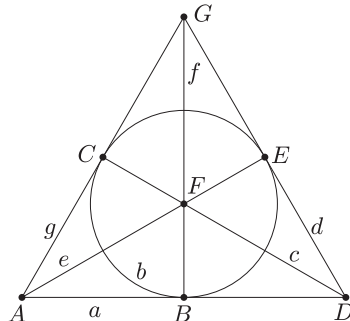
1. ábra

14 csúcsú jó gráf létezik, ilyen látható a 2. ábrán. Az utolsó nyolc csúcs ( $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $B_3$ ,  $B_4$ ,  $B_5$ ,  $B_6$ ) szomszédainak kiválasztásakor arra kell figyelni, hogy az  $A_i$  típusú csúcsok mindkét szomszédja  $B_j$  típusú legyen és ráadásul az egyik  $B_1$ -nek, a másik pedig  $B_2$ -nek legyen szomszédja, valamint ugyanez igaz legyen a  $B_i$  típusú csúcsokra is.

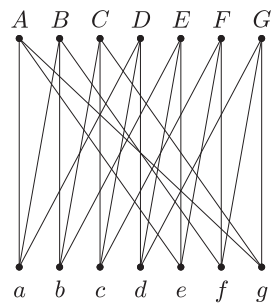


2. ábra

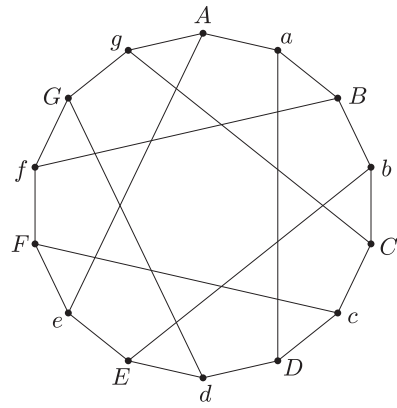
*Megjegyzés.* Megmutatható, hogy a feltételeknek megfelelő, 14 csúcsú gráf izomorfia erejéig egyértelmű (tehát a 4. és az 5. ábrán lényegében ugyanazt láthatjuk). Ezt a gráfot *Heawood-gráfnak* nevezik, legismertebb előállítás a 3. ábrán látható Fano síkhoz kapcsolódik (a Fano síkról *Schmidt Tamás: Geometriai terek az algebra szemszögéből* (KöMaL 2004/4, 199–206. oldal) c. cikkének bevezetőjében olvashatunk). A sík 7 pontja és 7 egyenese adja a gráf 14 csúcsát. Két csúcsot pontosan akkor köt össze él, ha az egyik egyenesnek, a másik pedig valamely arra illeszkedő pontnak megfelelő csúcs. Mivel a sík minden egyenesén 3 pont van és minden ponton át 3 egyenes megy, a gráfban minden pont foka 3. A gráf definíciójából következően páros (az egyik osztályban a sík pontjainak, a másikban pedig a sík egyeneseinek megfelelő csúcsok vannak), ezért nincs benne páratlan hosszú kör. Négy hosszú kör sincs a gráfban, ellenkező esetben ugyanis volna a síkon két különböző pont, melyeknek két különböző összekötő egyenese lenne.



3. ábra



4. ábra



5. ábra