

**Megoldás.** Mivel a  $\{3x\}$  és a  $\{x\}$  függvény értékek is az  $x$  és  $x+1$  helyeken megegyeznek, elegendő az egyenletet a  $0 \leq x < 1$  intervallumban vizsgálni. Három esetet különböztetünk meg.

1) Ha  $0 \leq x < \frac{1}{3}$ , akkor a függvény  $(3x)^2 + x^2$ , azaz az

$$9x^2 + x^2 = 1$$

egyenletet kell megoldani. Ekkor a megoldás  $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ , s ez valóban az adott intervallumba esik.

2) Ha  $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ , akkor a függvény  $(3x-1)^2 + x^2$ , az egyenlet pedig

$$9x^2 = 6x + 1 + x^2 = 1,$$

ahonnan  $10x^2 = 6x$  és  $x = \frac{3}{5}$ . Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez is a kijelölt intervallumba esik.

3) Ha  $\frac{2}{3} \leq x < 1$ , akkor a függvény  $(3x-2)^2 + x^2$  és a megoldandó egyenlet:

$$10x^2 - 12x + 3 = 0.$$

Innen  $x = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{10}$ . Az  $x_1 = \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \approx 0,8449$  a megfelelő intervallumba esik,  $x_2 = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} \approx 0,3551$  viszont nem.

Az egyenletnek tehát végtelen sok megoldása van: minden egész  $n$ -re az  $[n, n+1)$  intervallumban három:

$$n + \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad n + \frac{3}{5} \quad \text{és} \quad n + \frac{6 + \sqrt{6}}{10}.$$