

Megoldás. Szorozzunk a pozitív xy -nal. Kapjuk, hogy

$$(x+y)\sqrt{xy} \leq x^2 + y^2.$$

Felhasználva a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$(x+y)\sqrt{xy} \leq (x+y)\frac{x+y}{2} = \frac{(x+y)^2}{2}.$$

Azt állítjuk, hogy

$$\frac{(x+y)^2}{2} \leq x^2 + y^2.$$

Végezzük el a műveleteket:

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq 2(x^2 + y^2), \quad 0 \leq (x^2 + y^2 - 2xy) = (x-y)^2,$$

ami egy igaz állítás. Ebből következik az eredeti egyenlőtlenség igaz volta is, mivel xy -nal szorozva ekvivalens átalakítást végeztünk.