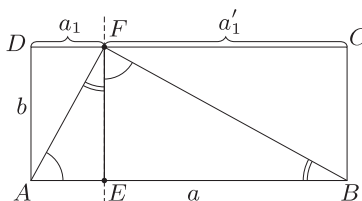
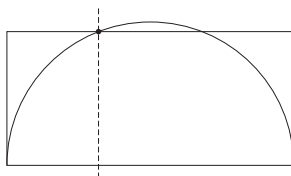


Megoldás. Vizsgáljuk meg, mikor lehet egy T_0 téglalapot a feladat előírásai szerint két részre vágni. A vágás nyilván párhuzamos a téglalap egyik oldalával, legyen ennek hossza b , a másik oldal hossza pedig a , amelyet a b hosszúságú vágás az a_1, a'_1 részekre oszt (1. ábra). Két téglalap pontosan akkor hasonló, ha a merőleges oldalaik aránya egyenlő, így vagy $\frac{a_1}{b} = \frac{a'_1}{b}$, vagy pedig $\frac{b}{a_1} = \frac{a'_1}{b}$. A feltétel szerint a részek nem egybevágók, így csak a második eset valósulhat meg. Az 1. ábra szerint $\frac{FE}{EA} = \frac{EB}{EF}$, ami azt jelenti, hogy az AEF és az FEB derékszögű háromszögek is hasonlóak. A szögeket egybevetve innen $\angle AFB = 90^\circ$ adódik – ez lényegében a magasságtétel megfordítása. Mivel $b^2 = a_1 a'_1$ és $a_1 \neq a'_1$, a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint az is következik, hogy $a = a_1 + a'_1 > 2\sqrt{a_1 a'_1} = 2b$. Egy adott módon felbontható T_0 téglalap hosszabb és rövidebb oldalának az aránya tehát nagyobb 2-nél. Hívjuk a továbbiakban az ilyen téglalapokat *vékony*nak.



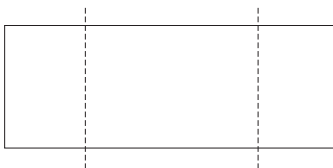
1. ábra

Ez a feltétel elégséges is a megfelelő felbontás létezéséhez. Egy vékony téglalap hosszabbik oldalának a Thalesz köre ugyanis két pontban metszi a szemközti oldalt (2. ábra). A magasságtétel szerint ezek bármelyikén keresztül a rövidebbik oldallal párhuzamos egyenes két hasonló részre vágja a téglalapot, amelyek nem egybevágók. Az eljárás akkor folytatható, ha az így adódó hasonló részek maguk is vékonyak.

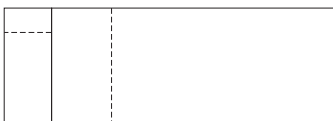


2. ábra

Ha az eljárás korlátlanul folytatható, akkor vékony téglalapok egymásba skatulyázott sorozatát kapjuk. Ez a sorozat persze nem egyértelmű. Egy adott részt alkalmas módon felosztó két vágás bármelyikét megejthetjük, illetve a kapott hasonló részek bármelyikében folytathatjuk a felosztást. A két párhuzamos vágással kapott felosztással azonban egybevágó, a T_0 hosszabbik oldalának tengelyére szimmetrikus ábrákat kapunk, ha pedig mindkét résztéglalapban megrajzolunk egy-egy osztóvonalat, akkor a felosztott részek is hasonlóak maradnak (3. ábrák).

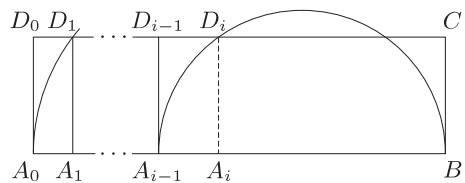


3a. ábra



3b. ábra

Ha tehát valóban korlátlanul folytatható az eljárás, akkor ez úgy is megtehető, hogy a $T_0 = A_0 B C D_0$ téglalap rövidebbik oldalával párhuzamosan vékony téglalapok $A_{i-1} A_i D_i D_{i-1}$ sorozatát vágjuk le T_0 -ból. Az $A_i D_i$ vágás az éppen szétvágandó $T_i = A_{i-1} B C D_{i-1}$ résztéglalap hosszabbik $A_{i-1} B$ oldala Thalesz körének a szemközti oldallal adódó két metszéspontja közül a C csúctól távolabbin keresztül halad (4. ábra), miközben természetesen a másik rész, az $A_i B C D_i$ téglalap is vékony. Ekkor a szerkesztés miatt $A_{i-1} A_i \cdot A_i B = A_i D_i^2 = b^2$ és $A_{i-1} A_i < A_i B$. A két szakasz nagyobbika, $A_i B$ így a szakaszok mértani közepénél, b -nél is nagyobb, a vékony $A_i B C D_i$ téglalapban továbbra is $A_i B$ a nagyobbik oldal.



4. ábra

Innen már látszik, hogy az eljárás nem folytatható korlátlanul. Valóban, ha az $A_{i-1}A_i \cdot A_iB$ szorzat állandó, miközben egyik tényezője, A_iB csökken, akkor a másik tényező, $A_{i-1}A_i$ növekszik. Az $AB = A_0B$ szakaszból tehát mind nagyobb részeket vágunk le, miközben a megmaradó A_iB szakasz minden egyes lépés után nagyobb marad, mint $2b$. Ez nyilván nem lehetséges, a keresett tulajdonságú T_0 téglalap nem létezik.