Megoldás. A feladat jelöléseit némileg módosítva legyen $a_{n,k} = \dfrac{1}{k \cdot \binom{n}{k}}$ és $b_{n,k} = \dfrac{1}{k \cdot 2^{n-k}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ha $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}$ és $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}$, akkor az $A_n = B_n$ egyenlőséget kell igazolnunk.

$A_1 = B_1 = 1$ nyilvánvalóan igaz. Megmutatjuk, hogy az A_n és a B_n sorozatokra egyaránt teljesül az

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{n+1} \tag{$*$}$$

rekurzió, ebből pedig következik a bizonyítandó egyenlőség.

A B_n sorozat esetében ez majdnem nyilvánvaló. Ha ugyanis $1 \le k \le n$, akkor $b_{n+1,k} = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{1}{2^{n+1-k}} = \dfrac{1}{2} b_{n,k}$, tehát $B_{n+1} - b_{n+1,n+1} = \dfrac{1}{2} B_n$. Rendezés után innen valóban a $(*)$ rekurziót kapjuk, hiszen $b_{n+1,n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

Az A_n sorozat vizsgálatához először megmutatjuk, hogy az összeg tagjaira egy „fordított" Pascal-háromszög-szerű összefüggés teljesül: ha egy háromszög alakú táblázat n-edik sorába az $a_{n,k}$ sorozat elemeit írjuk (*ábra*), akkor az így kapott elrendezésben minden elem az *alsó* két szomszédjának az összege:

$$a_{n,k} = a_{n+1,k} + a_{n+1,k+1}. \tag{1}$$

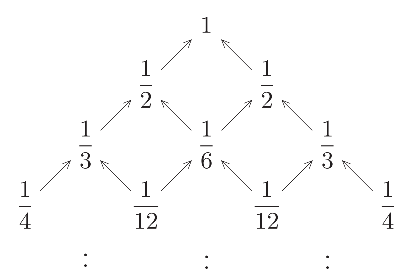
Az (1) egyenlőség egyszerű számolással adódik. Az $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ azonosságot felhasználva azt kell megmutatnunk, hogy

$$\frac{k!(n-k)!}{k \cdot n!} = \frac{k!(n+1-k)!}{k \cdot (n+1)!} + \frac{(k+1)!(n-k)!}{(k+1) \cdot (n+1)!}.$$

Ha szorzunk $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$-sal, akkor egyszerűsítés és összevonás után a nyilvánvalóan igaz

$$\frac{1}{k} = \frac{n+1-k}{k \cdot (n+1)} + \frac{k+1}{(k+1)(n+1)} = \frac{(n+1-k)+k}{k \cdot (n+1)} = \frac{n+1}{k \cdot (n+1)}$$

egyenlőséget kapjuk.



Az (1) rekurzió szerint a táblázat n-edik sorában álló elemek összegében az $(n+1)$-edik sor elemei vesznek részt: a két szélső, $a_{n+1,1}$ és $a_{n+1,n+1}$ egyszer, a többiek pedig kétszer. Ez azt jelenti, hogy az n-edik sor elemeinek az összege, $A_n = 2A_{n+1} - a_{n+1,1} - a_{n+1,n+1}$. Mivel pedig $a_{n+1,1} = a_{n+1,n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, innen valóban $A_{n+1} = \dfrac{A_n}{2} + \dfrac{1}{n+1}$ adódik, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. Az $a_{n,k}$ számok a binomiális együtthatókéra emlékeztető szimmetriával is rendelkeznek: könnyű igazolni, hogy ha $p + q = n + 1$, akkor $a_{n,p} = a_{n,q}$.