Megoldás. Bontsuk fel a kifejezésben szereplő zárójeleket:

$$x^3+y^3+xy+x^2y^2=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3.$$

Tovább alakítva:

$$x^2y^2+xy+2y^3+3x^2y-3xy^2=0,\quad \text{majd}\quad y\big(2y^2+(x^2-3x)y+3x^2+x\big)=0$$

adódik.

Ha $y=0$, akkor x tetszőleges egész szám lehet, az $(x;0)$ számpár megoldás.

Ha $y\neq 0$, akkor oszthatunk vele, így y-ban másodfokú polinomot kapunk:

$$2y^2+(x^2-3x)y+3x^2+x=0.$$

Erre felírva a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$y_{1,2}=\frac{-(x^2-3x)\pm\sqrt{(x^2-3x)^2-24x^2-8x}}{4}.$$

A négyzetgyök alatt szereplő kifejezés:

$$x^4+9x^2-6x^3-24x^2-8x=x\cdot(x^3-6x^2-15x-8)=x(x-8)(x+1)^2,$$

amiből

$$y_{1,2}=\frac{-x^2+3x\pm(x+1)\sqrt{x(x-8)}}{4}.$$

A négyzetgyök értéke racionális (ellenkező esetben nem kaphatnánk egész megoldást y-ra), és mivel $x(x-8)$ egész szám, azért négyzetszám kell legyen.

$x(x-8)=d^2$, átalakítva $x^2-8x-d^2=0$, ebből

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+4d^2}}{2}=4\pm\sqrt{4^2+d^2}.$$

4^2+d^2 négyzetszám. Triviális megoldás a $d=0$, egyébként keressük azokat a Pitagoraszi számhármasokat, amelyekben az egyik szám a 4. Ilyen egy van: a 3, 4, 5. Eszerint $d=0$ vagy $d^2=9$.

Ha $d=0$, akkor $x=0$ vagy $x=8$, ha $d^2=9$, akkor $x=9$ vagy $x=-1$.

Ezekhez az értékekhez tartozó y értékek:

$x=0$ esetén $y=0$;
$x=8$ esetén $y=-10$;
$x=9$ esetén $y=-6$ vagy $y=-21$;
$x=-1$ esetén $y=-1$.

Ezeken kívül találtuk még az $y=0$, x tetszőleges számpár megoldásokat.