

Megoldás.

1. a) és b) A Föld felszínén lévő testre ható nehézségi erő (a Föld forgását elhanyagolva): $mg = G\frac{Mm}{R_F^2}$, amiből $GM = gR_F^2$. Newton II. törvénye a körpályán mozgó testre felírva: $G\frac{Mm}{r_0^2} = m\frac{v_0^2}{r_0}$, ahol $v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0}$. Rendezve az egyenleteket, megkapjuk a geostacionárius műhold adatait:

$$r_0 = \left(\frac{gR_F^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m} \quad \text{és} \quad v_0 = R_F \sqrt{\frac{g}{r_0}} = 3,07 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

c) A perdület definíciója alapján $L_0 = mv_0 r_0 = \frac{mgR_F^2}{v_0}$. A teljes mechanikai energia a mozgási energia és a (negatív) helyzeti energia összege:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{r_0^2} = -\frac{1}{2}mv_0^2.$$

2.1. Felhasználva, hogy a perdület a Föld középpontja felé mutató lökés hatására nem változik meg, a megadott képletbe behelyettesítve:

$$l = \frac{L_0^2}{GMm^2} = \frac{m^2 g^2 R_F^4}{v_0^2} \frac{1}{gR_F^2 m^2} = \frac{gR_F^2}{v_0^2} = r_0.$$

A mechanikai energia új értéke

$$E = \frac{1}{2}m(v_0^2 + \Delta v^2) - G\frac{Mm}{r_0^2} = \frac{1}{2}m\Delta v^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1),$$

ezt behelyettesítve ε képletébe és a képletet rendezve: $\varepsilon = \left(1 + \frac{2EL_0^2}{G^2 M^2 m^3}\right)^{1/2} = \beta$. Mivel $\varepsilon = \beta < 1$, a pálya ellipszis.

2.2. Az eredeti körpálya és az ellipszispálya a pályamódosítás pontjában metszi egymást. Ebből $r(\theta = \alpha) = r_0 = \frac{r_0}{1 - \varepsilon \cos \alpha}$, amiből $\alpha = 90^\circ$.

2.3.

$$r_{\max} = \frac{l}{1 - \varepsilon} = \frac{r_0}{1 - \beta} = 5,63 \cdot 10^7 \text{ m} \quad \text{és} \quad r_{\min} = \frac{l}{1 + \varepsilon} = \frac{r_0}{1 + \beta} = 3,38 \cdot 10^7 \text{ m}.$$

2.4. Az ellipszispálya fél nagytengelye $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{r_0}{1 - \beta^2}$. Kepler III. törvénye szerint $\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}$, amiből $T = T_0(1 - \beta^2)^{-3/2} = T_0 \left(\frac{15}{16}\right)^{-3/2} = 26,4 \text{ h}$.

3.1. Parabolapályánál $\varepsilon = 1$, ebből $\beta_{\text{esc}} = 1$.

3.2. $r'_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta} = \frac{r_0}{2}$.

4.1. Az energiamegmaradásból

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1) = \frac{1}{2}mv_\infty^2,$$

amiből $v_\infty = v_0\sqrt{\beta^2 - 1}$.

4.2. A perdületmegmaradásból $mv_0 r_0 = mv_\infty b$, amiből $b = r_0(\beta^2 - 1)^{-1/2}$.

4.3. $r(\theta_\infty) = \infty$, ha $1 - \varepsilon \cos \theta_\infty = 0$, amiből $\theta_\infty = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right)$ és $\varphi = 90^\circ + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = 90^\circ + \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 138^\circ$.