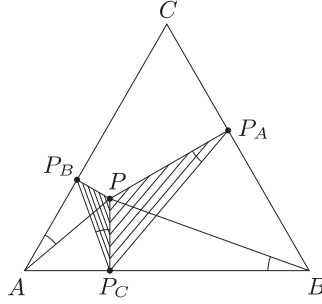


Megoldás. Jelölje a P merőleges vetületét a BC , AC , AB oldalakra rendre P_A , P_B , illetve P_C .

a) Tegyük fel, hogy az ABC szabályos háromszög belsejében lévő P pontra $PP_B \cdot PP_A = PP_C^2$ teljesül, azaz

$$(1) \quad \frac{PP_B}{PP_C} = \frac{PP_C}{PP_A}.$$



1. ábra

Mivel az AP_CPP_B négyszög és a BP_APP_C négyszög húrnégyszög ($PP_BA \sphericalangle = PP_CA \sphericalangle = 90^\circ$ és $PP_CB \sphericalangle = PP_AB \sphericalangle = 90^\circ$ miatt), azért az AP_CPP_B négyszögben a PP_B húrhoz tartozó kerületi szögekre $P_BAP \sphericalangle = P_BP_CP \sphericalangle = \alpha$, valamint $P_BAP_C \sphericalangle = 60^\circ$ miatt $P_BPP_C \sphericalangle = 120^\circ$.

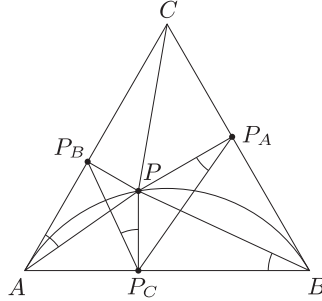
Hasonlóan $P_APP_C \sphericalangle = 120^\circ$. Ezeket (1)-gyel egybevetve adódik, hogy a P_BPP_C és a P_APP_C háromszögek hasonlóak, mivel egy oldalpárjuk aránya és a közbezárt szög megegyezik. Ezért $PP_CP_B \sphericalangle = PP_AP_C \sphericalangle = \alpha$.

A BP_APP_C húrnégyszögben a PP_C húrhoz tartozó kerületi szögekre $PP_AP_C \sphericalangle = PBP_C \sphericalangle = \alpha$ teljesül. Így az APB háromszögben:

$$APB \sphericalangle = 180^\circ - PAB \sphericalangle - \alpha = 180^\circ - (60^\circ - \alpha) - \alpha = 120^\circ.$$

A P pontból tehát az AB szakasz 120° -os szögben látszik, így P az AB szakasz látószögmérvénének ABC háromszögbe eső ívén helyezkedik el.

b) Most megmutatjuk, hogy ennek a körívnek minden P belső pontja jó, azaz teljesíti a $PP_B \cdot PP_A = PP_C^2$ feltételt (2. ábra).



2. ábra

$CAP \sphericalangle = \alpha$ és $PAB \sphericalangle = 60^\circ - \alpha$, vagyis a PAB háromszögben

$$PBA \sphericalangle = 180^\circ - (60^\circ - \alpha) - 120^\circ = \alpha.$$

Az AP_CPP_B és a BP_APP_C húrnégyszögekben $P_BAP \sphericalangle = P_BP_CP \sphericalangle = PP_AP_C \sphericalangle = PBP_C \sphericalangle = \alpha$.

Mivel

$$P_BPP_C \sphericalangle = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = P_APP_C \sphericalangle,$$

azért a P_BPP_C és a P_APP_C háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik megegyeznek. Így egyenlő a megfelelő oldalak aránya is: $\frac{PP_B}{PP_C} = \frac{PP_C}{PP_A}$, ahonnan $PP_B \cdot PP_A = PP_C^2$.

A keresett mértani hely tehát az AB oldal 120° -os látószögmérvénének a háromszög belsejébe eső íve.