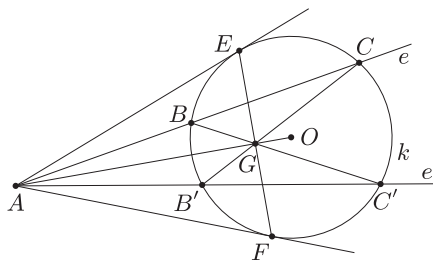


I. megoldás. Legyen az A ponton átmenő szelő e , ami az adott kört a B és a C pontban metszi. A k kör középpontja legyen O , az e tükörképe OA egyenesére e' , B , illetve C tükörképe pedig B' , illetve C' . A tükrözés miatt $B'GE \angle = BGF \angle$ és $C'GE \angle = CGF \angle$.



1. ábra

Ezért a bizonyítandó állítással ekvivalens, hogy $BGF \angle = C'GE \angle$, ami éppen azt jelenti, hogy G a BC' szakaszon van.

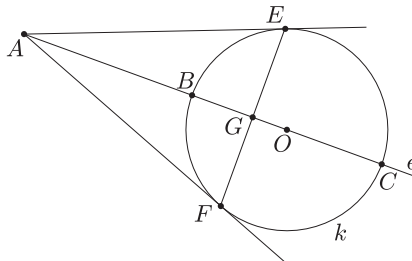
Tehát a szimmetria miatt azt kell megmutatnunk, hogy BC' és $B'C$ metszéspontja (legyen P) egybeesik a G ponttal, azaz P helyzete független az e -nek az OA -val bezárt α szögétől.

Rögzítsük e -t egy tetszőleges helyzetben, amely nem azonos AO -val (hiszen akkor a feladat állítása nyilvánvalóan teljesül – 2. ábra). Alkalmazzuk a szögfelező-tételt az ABC' háromszögre:

$$(1) \quad \frac{AB}{AC'} = \frac{PB}{PC'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{PB}{AB} = \frac{PC'}{AC'} = \frac{PC}{AC} = \frac{PB'}{AB'};$$

az utolsó két egyenlőség az előbbiből és az AO -ra vonatkozó tengelyes szimmetriából következik.



2. ábra

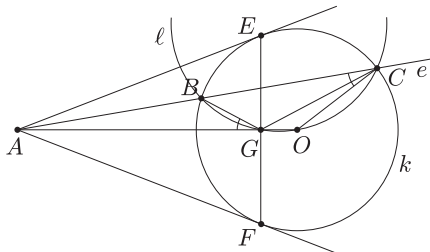
Az (1) szerint a páronként különböző B , C , B' és C' pontok rajta vannak AP egyik Apollóniusz-körén, de ugyanakkor az adott k körön is, ami csak úgy lehetséges, ha a két kör egybeesik. Legyenek X és Y az AO egyenesének a körrel való metszéspontjai, ekkor tehát $\frac{PX}{XA} = \frac{PY}{YA}$. Írjuk fel az itt szereplő szakaszokat a kör r sugarának segítségével:

$$\frac{r - OP}{OA - r} = \frac{r + OP}{OA + r}, \quad \text{ami átrendezve: } OP = \frac{r^2}{OA}.$$

Ebből már látszik, hogy OP csak r -től és OA -tól függ, α -tól nem, amit bizonyítani akartunk. Könnyen belátható (pl. az OEA derékszögű háromszög OE befogójára felírt befogótétel segítségével), hogy ez a pont egybeesik a G ponttal.

II. megoldás. Legyen ismét a k kör középpontja O , sugara r . E és F egymás tükörképei az AO egyenesre nézve, ezért AO merőleges EF -re; ugyanakkor AE merőleges EO -ra, mivel AE érintő.

A befogótétel alapján $r^2 = EO^2 = AO \cdot GO$. Mivel A , G és O kollineárisak, ez azt jelenti, hogy az A és G pontok egymás inverzei a k alapkörre nézve.



3. ábra

Jelölje továbbra is e a BC egyenest. Az inverzió ismert tulajdonságai alapján e inverze a k körre nézve a BCO háromszög köréírt köre (kivéve az O pontot), legyen ez az ℓ kör. Mivel A illeszkedik e -re és A inverze a k körre nézve G , azért G rajta van az ℓ körön. Így a $BCOG$ négyszög húrnégyszög.

$AGB \sphericalangle = OCB \sphericalangle (= \varphi)$, mivel mindkét szög 180° -ra egészíti ki a BGO szöget. (Az egyik mellékszög, a másik pedig a húrnégyszögek tétele szerint.)

A BCO háromszög egyenlő szárú, hiszen $BO = CO = r$; így

$$OBC \sphericalangle = OCB \sphericalangle = \varphi.$$

Mivel $BCOG$ húrnégyszög, az OC oldal a B és a G csúcsokból ugyanakkora szög alatt látszik: $OGC \sphericalangle = OBC \sphericalangle = \varphi$. Tehát $AGB \sphericalangle = OCB \sphericalangle = OBC \sphericalangle = OGC \sphericalangle = \varphi$, ezért $BGF \sphericalangle = 90^\circ + \varphi = CGF \sphericalangle$.

Ez azt jelenti, hogy az EF egyenes valóban felezi a BGC szöget.